20230204

Vektoren und Tensoren

Oskar Sint, Eschwege

Inhaltsverzeichnis

1. Punkt - Kontinuum

In der Newtonschen Mechanik werden die Bewegungen von Körpern beschrieben, indem man sie in ihrem Schwerpunkt konzentriert und stellvertretend für den Körper die Bewegung dieses mit Masse behafteten Punktes beschreibt. Dabei wird vorausgesetzt, dass sich Form und Größe des Körpers während der Bewegung nicht verändern und damit das Volumen des Körpers den örtlichen Änderungen der Feldgrößen (Abstand, Geschwindigkeit) nicht unterliegt. Eine solche Bewegung ist das Kennzeichen des Modells eines starren Körpers.

Dieses Modell, auch als „Punktmechanik“ bezeichnet, besticht vor allem durch seine Einfachheit. Angesichts der riesigen Abstände der Planeten von der Sonne verglichen mit ihren Abmessungen ist die Zulässigkeit der Modellannahme scheinbar einleuchtend. Das gilt auch für die üblichen bewegten festen Körper unserer Welt. Die Erfolge der Himmelsmechanik aber auch die der modernen Technischen Mechanik sprechen für sich.

Für die Beschreibung der Bewegung von Kontinuen, wie Flüssigkeiten und Gase, sind die Modellannahmen der Punktmechanik nicht ohne weiteres geeignet. Die Folgen einer Bewegung sind dort ständige Veränderungen der Lage, der Größe sowie der Form der untersuchten Körper. Die Identifizierung von Körpern während der Bewegung ist nicht ohne weiteres möglich.

Diese Zusammenhänge gelten auch für feste Körper, wenn man berücksichtigt, dass diese sich elastisch verformen. Verglichen mit Flüssigkeiten und Gasen sind die Verformungen zwar gering, angesichts der Abmessungen von Planeten und Sternen können die Änderungen von Größe und Form durchaus Bedeutung erlangen.

Diese Schwierigkeiten haben zur Entwicklung von neuen Modellen geführt, die unter dem Begriff „Kontinuumsmechanik“ zusammengefasst werden.
Unter einem Körper versteht man dort eine zusammenhängende kompakte Menge von Massenpunkten („materiellen Punkten“), deren Lage und Bewegung durch eindeutige Zuordnung von Vektoren beschrieben werden kann. Dabei wird verlangt, dass benachbarte materielle Punkte sich stets an benachbarten Orten befinden und nicht mehrere materielle Punkte an einem Ort sein können.

Offen bleibt bei diesem Modell, wie man sich einen materiellen Punkt vorzustellen hat. Einerseits hat ein Punkt im mathematischen Sinne keine Abmessungen und keine Dimension, andererseits soll er die „Hülle“ für Masse sein.
Will man für einen Massenpunkt die dort herrschende Dichte des Kontinuums angeben, so ist eine kleine Masse durch ein kleines Volumen zu dividieren. Wenn das Volumen eines Punktes definitionsgemäß Null ist, kann eine sinnvolle Dichte nicht angegeben werden. Auch eine stetige Änderung der Dichte kann nur

innerhalb einer definierten „Hülle“ mit endlichen Abmessungen stattfinden und nicht sprunghaft von Ort zu Ort.

In gleicher Weise ist die Angabe einer Spannung in einem Punkt schwerlich möglich, ist doch die Spannung das Ergebnis der Division einer Kraft durch eine Fläche. Wenn die Oberfläche der „Hülle“ des Punktes jedoch Null ist, ist eine Spannung nicht definiert. Ebenso ist die stetige Änderung einer Spannung nur bei einer räumlichen Ausdehnung des Punktes denkbar.

Die Ausführungen zeigen, dass eigentlich keine Kontinuumsmechanik betrieben wird. Vielmehr handelt es sich um eine Punktmechanik im Kontinuum. Das gilt auch dann, wenn diese Punkte in einem Gitter angeordnet werden, und der Abstand der Gitterpunkte die räumliche Verteilung von Eigenschaften simulieren soll. Auch dann gehen Stetigkeit und Differenzierbarkeit verloren.

In der folgenden Untersuchung sind „Punkte“ deshalb grundsätzlich keine Massenpunkte. Vielmehr werden folgende Vereinbarungen getroffen:

Es wird unterschieden zwischen einem „Ort“ und einem „materiellen Punkt“.

Ein Ort wird definiert durch seine Koordinaten im Raum. Er ist unverschieblich mit einem Koordinatensystem verbunden, er ist materielos und dient nur der Strukturierung des Raumes.

Im Gegensatz dazu ist ein „materieller Punkt“ – oder kurz „Punkt“ genannt – immer Teil einer materiellen Struktur. Mehrere Punkte bilden Linien oder Kanten der Struktur, mehrere Kanten begrenzen die Oberflächen eines räumlichen Elementes.

Einfachstes Beispiel ist ein Quader. Mit Hilfe von Eckpunkten und Kanten kann er sehr einfach beschrieben werden. Setzt man gewisse Symmetrieeigenschaften voraus, genügt die Angabe der Koordinaten eines einzigen Eckpunktes, um den ganzen Quader zu definieren.

Ebenso wie dem Ort wird auch dem materiellen Punkt kein Volumen und keine Materie zugeordnet. Dies entspricht auch der mathematischen Vorstellung von einem Punkt. Ein Volumen entsteht erst durch die Struktur materieller Punkte, z.B. in Form eines Quaders. In dem Volumen des Quaders können sich Masse oder sonstige Eigenschaften befinden, deren räumliche oder zeitliche Verteilung man beschreiben möchte.
Zu Beginn einer Betrachtung werden bestimmte Orte mit entsprechenden Punkten zusammenfallen. Das bedeutet, dass ein materieller Punkt sich an diesem Ort befindet. Es ist das Ziel der Kontinuumsmechanik zu beschreiben, an welchen Orten sich ein materieller Punkt nach einer Verschiebung oder im Verlauf einer Bewegung befindet.

2. Vorbemerkung

Für die Behandlung von Problemen im Kontinuum bieten sich Vektoren und Tensoren als Werkszeuge an. Mit ihnen lassen sich Abstände und Richtungen sowie in der Anwendung Flächen und Volumina und deren Veränderung darstellen.

Das Rechnen mit Vektoren und Tensoren ist jedoch teilweise schwierig, weil sich der geometrische Sinn mancher Operationen häufig hinter Formalismen versteckt, die nicht ohne weiteres zu durchschauen sind.

Es ist daher ein Anliegen dieser Arbeit, alle wesentlichen Schritte durch bildhafte Darstellungen zu unterstützen. Hierdurch erhalten manche formale Rechenweisen oft erst ihre anschauliche Erklärung. Es zeigt sich darüber hinaus, dass grafische Darstellungen als Beweis für die Richtigkeit einer rechnerischen Herleitung verwendet werden können und gelegentlich ein neues Licht auf den Zusammenhang werfen. Dabei werden wir uns weitgehend auf die Darstellung in der Ebene xy beschränken, als Grundlage für das Verständnis auch des räumlichen Zusammenhangs.

Ein wesentliches Ergebnis dieser Arbeit ist die Einführung eines neuen Basisvektors.

Dieser wird von dem Einheitsvektor eines Vektors abgeleitet und steht für die Richtung dieses Vektors. Die Folge sind formale Änderungen und die Änderung von Schreibweisen und von Bedeutungen gegenüber der aktuellen Vektorrechnung.

Der Verfasser fühlt sich zu diesem Eingriff in eine bestehende Theorie ermutigt durch eine Bemerkung von Sabine Hossenfelder, die hier zitiert werden soll:

„Die heutige Physik zeichnet sich aus durch die magische Präferenz des mathematisch Eleganten zulasten des physikalisch Verständlichen.
Das riesige Manko all jener Formalismen liegt im Fehlen sowohl des Anschaulichen als auch des Bezuges zu anderen Modellen.“

Wenn auch dieses Zitat nicht für etwas so Elementares wie Vektoren und Tensoren gedacht war, so ist die Ähnlichkeit des Zusammenhanges nicht zu übersehen. So werden wesentliche Zusammenhänge auch in der Vektor- und Tensorrechnung hinter Abkürzungen und symbolischen Schreibweisen versteckt, die eine gewisse Eleganz vortäuschen, die aber einem nicht vorgebildeten Leser den Zugang versperren. Wenn dann wesentliche Nachweise ohne eine grafische Begleitung bleiben, geht die Anschaulichkeit vollends verloren.

Darüber hinaus wollen wir in dieser Arbeit auf viele heute übliche mathematische Kurzzeichen möglichst verzichten, die als mathematischer „Apparat“ oft schwierige Zusammenhänge abgekürzt darstellen sollen. Vielmehr entspricht die hier gewählte Darstellung etwa dem Standard, der bis vor etwa einem halben Jahrhundert im mathematischen Unterricht Höherer Schulen und auch an Hochschulen üblich war. Man könnte diesen Standard auch als „Basismathematik“ bezeichnen.

Zu den Grundlagen der modernen Physik gehören vektorielle und tensorielle Rechenverfahren. Die mathematische Schönheit und ihre Effizienz waren so erfolgreich, dass man in den Fällen, in denen die Ergebnisse der Rechnungen nicht mit der Realität in Übereinstimmung zu bringen waren, mathematische Hilfstheorien entwickelt hat, um diese zu erzwingen. Als Beispiel wäre die Einführung von Skalar- und Vektorprodukt als Teile des Produktes von Vektoren zu nennen oder auch die Einführung einer vierten Dimension für den Zeitvektor durch Albert Einstein. Aber auch moderne Theorien zur Erklärung der Gravitation gehören hierzu.
Diese Zusammenhänge haben den Verfasser veranlasst, sich mit den Grundlagen der Vektorrechnung zu befassen.

„Zurück zu den Grundlagen“ könnte als Überschrift über dieser Arbeit stehen.

Im Gegensatz zu einer Zahl, einem „Skalar“, ist ein Vektor eine Funktion zweier Veränderlicher, nämlich von „Abstand“ und „Richtung“. Während der „Abstand“ in der Vektorrechnung gut darstellbar ist, gibt es keine adäquate und einfache Formulierung für die „Richtung“. Die Verwendung eines neuen Basisvektors eröffnet neue Möglichkeiten der Beschreibung auch der „Richtung“ eines Vektors.

In Vielem bewegen wir uns bei dieser Arbeit auf Neuland. Das hat zur Folge, dass die Darstellung gelegentlich ungewohnt wirken kann und sicher auch Schwächen in den mathematischen Formulierungen aufweist. Erst die häufige Beschäftigung mit dem Thema durch viele dem Verfasser nachfolgende Nutzer wird eine bessere und auch dem Anspruch der „Schönheit“ genügende Form dieser Arbeit bringen.

3. Vektorräume der Linearen Algebra

(vgl. Jänich, Klaus, Lineare Algebra, Springer-Verlag, Berlin 1991)

Vektorräume sind ein Hauptgegenstand der Linearen Algebra, Vektoren sind Elemente eines Vektorraumes, die gewisse Regeln für Addition und Multiplikation erfüllen müssen.

Die **Lineare Algebra** (auch Vektoralgebra) ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Vektorräumen und **linearen** Abbildungen zwischen diesen beschäftigt. Dies schließt insbesondere auch die Betrachtung von **linearen** Gleichungs-systemen und Matrizen mit ein.

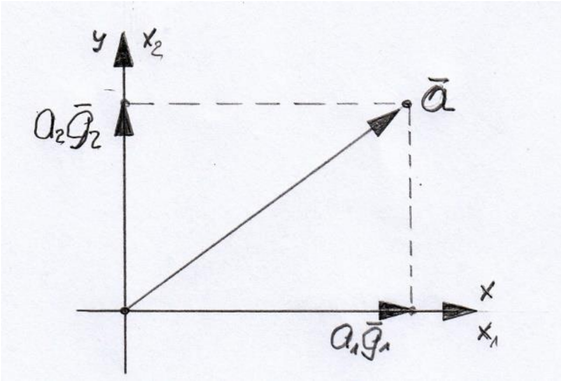
Eine wesentliche Grundlage der Linearen Algebra ist ihr Umgang mit dem Produkt zweier Vektoren. Mit der Einführung von Skalarprodukt und Vektorprodukt ist das Produkt von Vektoren nicht kommutativ und stört damit die Einheitlichkeit der Rechenverfahren der Linearen Algebra. Das hat Folgen für die einheitliche Darstellung vieler physikalischer Zusammenhänge.

Die Einführung eines neuen Basisvektors in dieser Arbeit ergibt die Möglichkeit das Produkt von Vektoren als kommutative Rechenoperation darzustellen. Wir halten dies für ein wesentliches Ergebnis.

4. Vektoren

Ein Vektor ist ein mathematisches Element, mit dem man Abstand und Richtung eines Ortes bezogen auf den Ursprung eines Koordinatensystems beschreiben kann. Betrachtet man einen Vektor in seiner Komponentendarstellung, z.B.

$$\mathbf{a} = \sum_i a_i \bar{g}_i = a_i \, \mathbf{g}_i$$



so sind „Abstand und Richtung“ nicht ohne weiteres zu erkennen. Vielmehr müssen „Abstand und Richtung“ in nicht ganz elementaren Rechnungen aus den Komponenten a_i und $\mathbf{g}_i$ ermittelt werden.

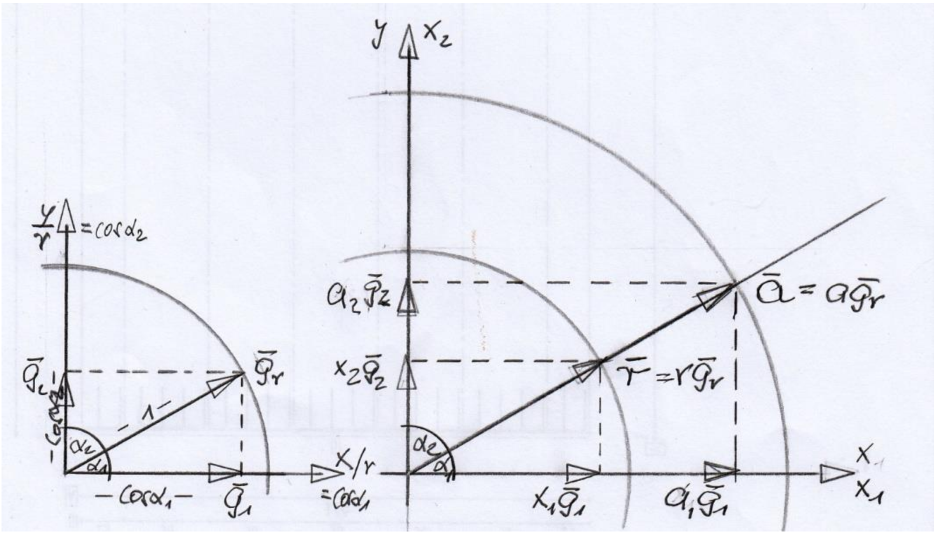
Wir begegnen hier erstmals einem Beispiel der „Einstein´schen Summenkonvention“, nach der bei doppelt auftretenden Indizes auf das Summenzeichen verzichtet werden kann. Wir werden die Bedeutung dieses Zusammenhanges in einem späteren Kapitel noch eingehend erläutern.

Ziel dieser Arbeit soll sein, den Vektor als Funktion sowohl der Komponenten als auch der beiden Veränderlichen „Abstand und Richtung“ darzustellen. Das wird zur Folge haben, dass einige Darstellungen und Inhalte anders interpretiert und bezeichnet werden müssen, als das in der Vektorrechnung bisher üblich ist.

Folgende Schreibweisen und Bezeichnungen werden vereinbart:

Vektoren werden durch Fettdruck gekennzeichnet, oder durch einen Überstrich,
Komponenten eines Vektors haben einen unteren oder oberen Index, der sich auf die Richtung der Koordinatenachse bezieht,
treten an einem Vektor zwei oder mehrere Indizes auf, so handelt es sich um einen Tensor zweiter oder höherer Stufe. Einen Vektor kann man deshalb auch als zweistufigen Tensor ansehen.
Zur Unterscheidung werden Tensoren auch mit Großbuchstaben bezeichnet.
Es wird die Einstein´sche Summenkonvention verwendet: Tritt bei zwei aufeinander folgenden Ausdrücken der gleiche Index auf, so wird auch ohne Summenzeichen über diese Indizes summiert.

Schreibweise und Bedeutung der Elemente eines Vektors sind der folgenden Darstellung zu entnehmen.



Darin bedeutet im Einzelnen:

$\mathbf{a}$	$\Rightarrow$	Abstandsvektor, <u>materieller Vektor</u>
a	$\Rightarrow$	Betrag des Vektors $\mathbf{a}$
a_i	$\Rightarrow$	Komponente des Betrages a in Richtung Achse x_i
$\mathbf{a_i}$	$\Rightarrow$	Vektorkomponente des Vektors $\mathbf{a}$ in Richtung x_i
$\mathbf{a_o}$	$\Rightarrow$	Einheits-Richtungsvektor des Vektors $\mathbf{a}$
$\mathbf{r}$	$\Rightarrow$	<u>Ortsvektor</u> mit dem Betrag r, auch Radiusvektor
$\mathbf{x_i}$	$\Rightarrow$	Komponente von $\mathbf{r}$ in Richtung Achse x_i
$\mathbf{g}_r$	$\Rightarrow$	<u>Basisvektor</u> in Richtung $\mathbf{r}$
$\mathbf{g}_i$	$\Rightarrow$	Komponente von $\mathbf{g}_r$ in Richtung Achse $\mathbf{x_i}$
α_i	$\Rightarrow$	Richtungswinkel zwischen Achse $\mathbf{x_i}$ und $\mathbf{g}_r$

Zur bildlichen Darstellung: Das Koordinatensystem ist grundsätzlich räumlich. Wegen der einfacheren Darstellbarkeit wird in den meisten Fällen nur die Ebene xy dargestellt. Die Vorstellung vom Einfluss der Koordinate z ist in der Regel leicht zu ergänzen.

Im Sinne einer übersichtlichen Schreibweise wollen wir die kartesischen Koordinaten x, y, z durch eine Ziffernindizierung 1, 2, 3 bzw. i, j, k ersetzen, wenn wir mit Vektoren rechnen.

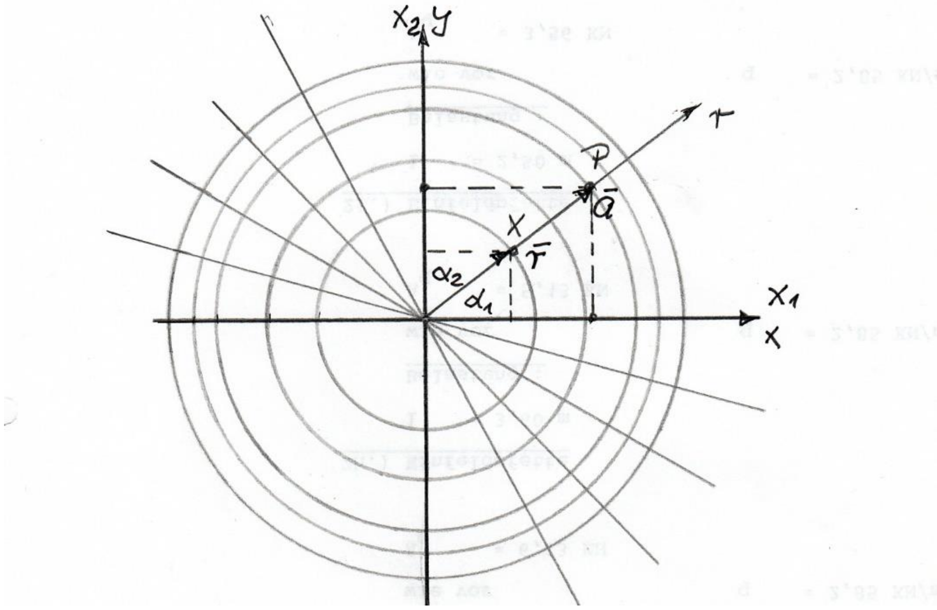
5. Koordinatensysteme

Abstand und Richtung sind die wesentlichen Informationen, die einen Ort im Raum beschreiben. Dazu definieren wir einen unverschieblichen „Ursprung“ oder „Basisort“ O und eine Basisrichtung, damit von dort aus Abstand und Richtung zu einem beliebigen Ort bestimmt werden können.

Alle **Orte gleichen Abstandes r** vom Ursprung liegen auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r – im ebenen Falle auf einem Kreis. Kugeln mit beliebigem Radius bilden eine Schar von unendlich vielen Kugeln, auf denen sich alle möglichen Orte des Raumes befinden. Das ist die Beschreibung eines kugelsymmetrischen Zentralfeldes.

Entsprechend liegen alle **Orte gleicher Richtung** auf einer Geraden, die im Basisort ihren Ursprung hat. Geraden unter beliebiger Richtung bilden ein radiales Feld. Auf den Schnittpunkten mit den Kugeln befinden sich alle Orte des Raumes. Das ist die Beschreibung eines radialen Zentralfeldes.

Ein kartesisches Koordinatensystem ermöglicht eine Verbindung der beiden Felder. Der Ursprung des Koordinatensystems fällt mit dem Basisort zusammen. Die Koordinatenachsen sind 3 spezielle Geraden des radialen Feldes, die aufeinander senkrecht stehen.

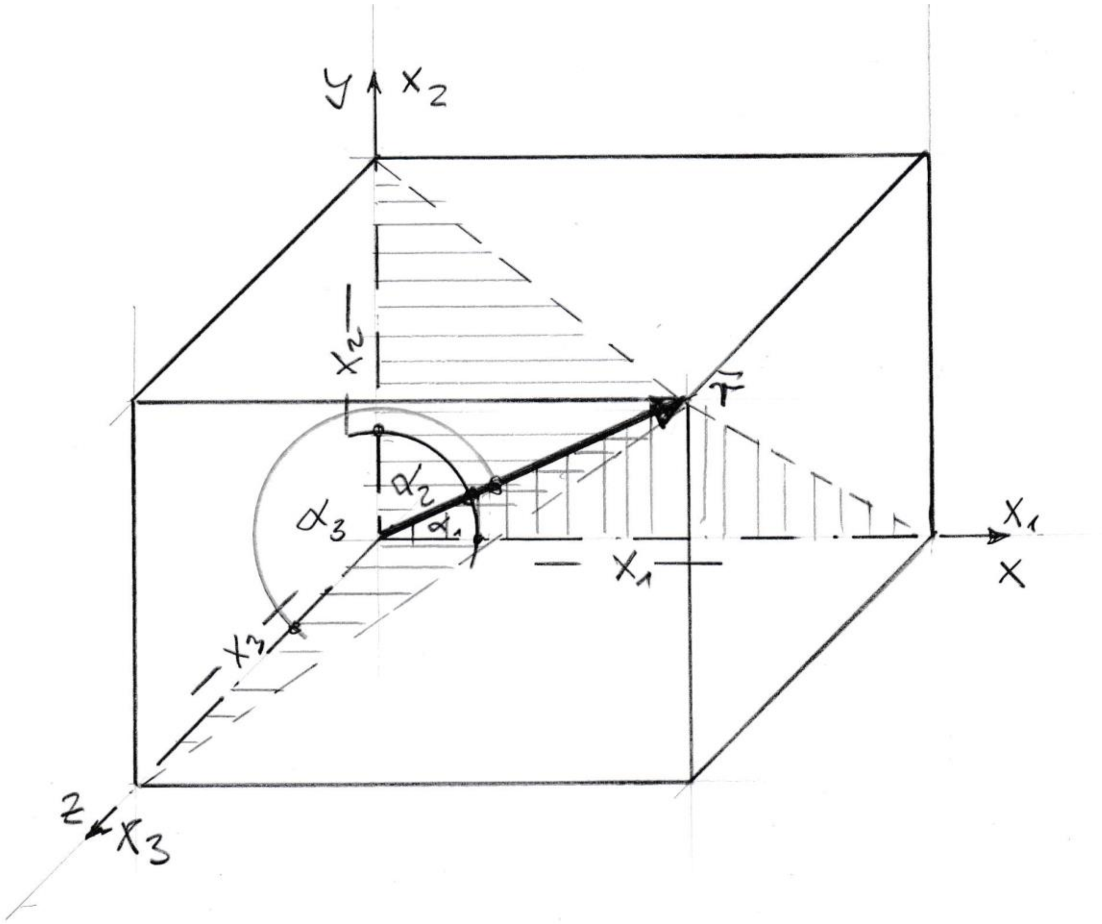


Koordinatensystem

Die Basisrichtung wird durch die Orientierung der Koordinatenachsen festgelegt. Für diese gilt die Forderung, dass Drehungen um die Achsen ausgeschlossen sind. Ein Ort X auf einer Kugel wird bestimmt durch den Abstand r auf einer Geraden, ein materieller Punkt P durch den Abstand a. Die Richtungswinkel sind die Winkel α_i zwischen einer Geraden und den Koordinatenachsen x_i.

In dem Koordinatensystem ist der Abstand r die Diagonale eines Quaders, der durch die Komponenten des Vektors **r** gebildet wird. Wegen des Bezuges auf eine Kugel ist der Abstand r konstant. Mit der Änderung der Winkel α_i ändern sich die Abmessungen und das Volumen des Quaders.
Da es sich um ein orthogonales System handelt, ist die Kombination der α_i nicht beliebig. Vielmehr müssen die Winkel die Bedingung des Pythagoras erfüllen:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = \cos^2 \alpha_i = 1$$



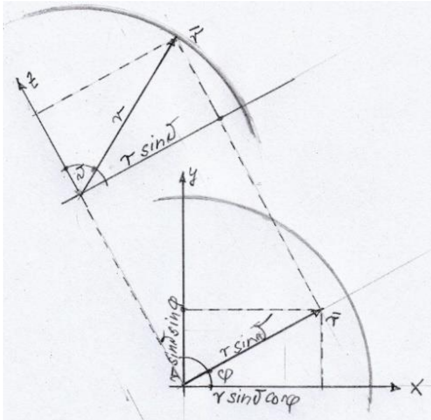
Die beschriebene Struktur ist ein Inertialsystem, wenn vorausgesetzt wird, dass

1. Basisort und Ursprung des Koordinatensystems unverschieblich sind.
   Das entspricht der Blockade von drei Freiheitsgraden (im räumlichen Falle), und
2. Drehungen um die Koordinatenachsen nicht zugelassen werden. Das entspricht der Blockade von drei weiteren Freiheitsgraden.

Damit gibt es 6 Bedingungen für 6 Freiheitsgrade und die Forderungen an ein räumliches Gleichgewicht sind erfüllt.

6. Kugelkoordinaten

Für die Bestimmung einer Richtung im Raum benötigt man drei Winkel oder zwei Winkel und eine Ordinate. Es ist üblich als Kugelkoordinaten die Winkel φ und ϑ zusammen mit der Ordinaten z zu verwenden.
Es gilt dann die Transformation:

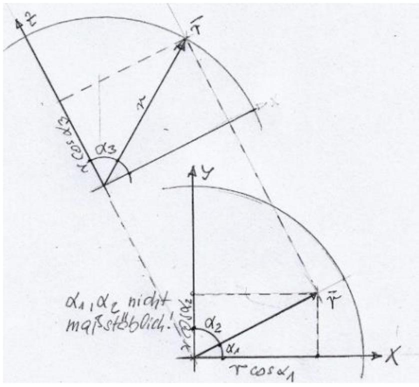


$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\vartheta$$

Hieraus folgt:

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 = \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + \sin^2\vartheta \sin^2\varphi + \cos^2\vartheta$$
$$= \sin^2\vartheta\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + \cos^2\vartheta = 1$$

Wir wollen anstelle der Winkel φ und ϑ die Richtungswinkel α_i verwenden, die sich als Winkel zwischen der betrachteten Richtung und den Koordinatenachsen x_i ergeben. Mit diesen Winkeln werden die Richtungskosinus der Vektorrechnung gebildet.



Hierfür gilt die Transformation:

$$x = x_1 = r \cos\alpha_1$$
$$y = x_2 = r \cos\alpha_2$$
$$z = x_3 = r \cos\alpha_3$$

Hieraus folgt:

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 = \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$$
$$\cos^2\alpha_i = 1$$

Beide Transformationen erfüllen den Pythagoras. Es wird aber deutlich, dass die Richtungswinkel α_i in Verbindung mit der logischen Indizierung für den Gebrauch in der Vektorrechnung Vorteile bieten.

Wir werden daher im Folgenden ausschließlich die Richtungswinkel α_i verwenden.

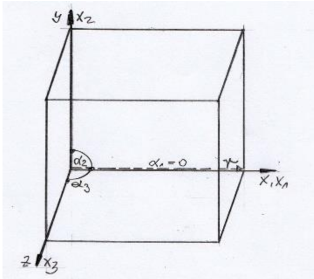
7. Die Richtungswinkel

Die Richtungswinkel α_i sind die Winkel zwischen einem Vektor **r** und den Koordinatenachsen $\mathbf{x}_i$. In einem dreiachsigen Koordinatensystem ergeben sich drei verschiedene Winkel. Wegen des orthogonalen Koordinatensystems gilt für die Richtungskosinus der räumliche Pythagoras: $\cos^2 \alpha_i = 1$
Die Summe der drei Winkel ist abhängig von der Richtung des Vektors. Folgende drei Fälle sind zu unterscheiden:

Fall 1: Die Vektorrichtung fällt mit der Richtung einer Achse zusammen, z.B. $\mathbf{x}_1$. Dann gilt:

$$\alpha_1 = 0°$$
$$\alpha_2 = 90°$$
$$\alpha_3 = 90°$$

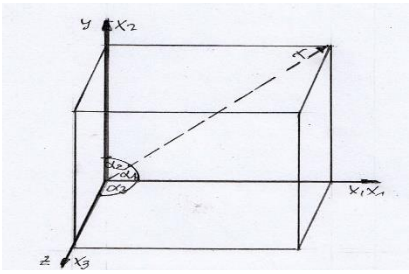
also: $\sum_1^3 \alpha_i = 180°$



Fall 2: Die Vektorrichtung liegt in der Ebene zweier Achsen, z.B. $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$
Dann gilt:

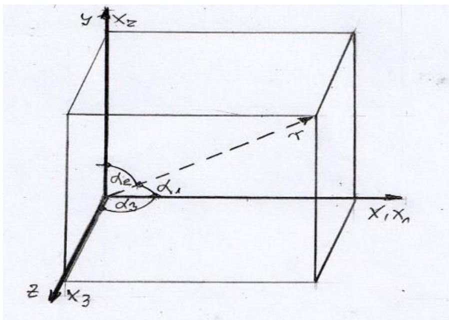
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$$
$$\alpha_3 = 90°$$

also: $\sum_1^3 \alpha_i = 180°$



Fall 3: Im Grenzfall liegt die Vektorrichtung in der Winkelhalbierenden der drei Achsen. Das bedeutet, dass alle drei Richtungswinkel $\alpha_i = \alpha$, also gleich sind. Nach dem Pythagoras folgt dann:

$$3 \cos^2\alpha = 1$$
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\sum_1^3 \alpha_i = 3 \text{ x } 54{,}74° = 164{,}21°$$



$\alpha = 164{,}21°$ ist der minimale Wert für die Winkelsumme. Die Richtungskosinus in den übrigen Bereichen errechnet man mit Hilfe des Pythagoras, wenn zwei Winkel bekannt sind. Die Winkelsumme liegt dann zwischen dem Minimalwert und 180°.

8. Geometrie: Abstand und Richtung in basisfreier Darstellung

Der Richtungskosinus ist der Kosinus des Richtungswinkels α_i in einem der rechtwinkligen Dreiecke, die von dem Vektor **r** und seiner Komponenten $\mathbf{x}_i$ gebildet werden. Die Verwendung der Richtungskosinus ermöglicht die Darstellung eines Ortes im Raum in Abhängigkeit von Abstand und Richtung.

In den beiden folgenden Bildern stellt das Koordinatensystem die Vereinigung zweier Systeme dar, nämlich eines kugelsymmetrischen (α_i) mit einem radialen Koordinatensystem (r). Die Verbindung wird durch ein kartesisches Koordinatensystem (x_i) hergestellt.

In Anlehnung an die Bezeichnungen bei schiefwinkligen Koordinatensystemen soll auch hier unterschieden werden zwischen kovarianten und kontravarianten Darstellungen.
Wir definieren für den Ortsvektor **r**:

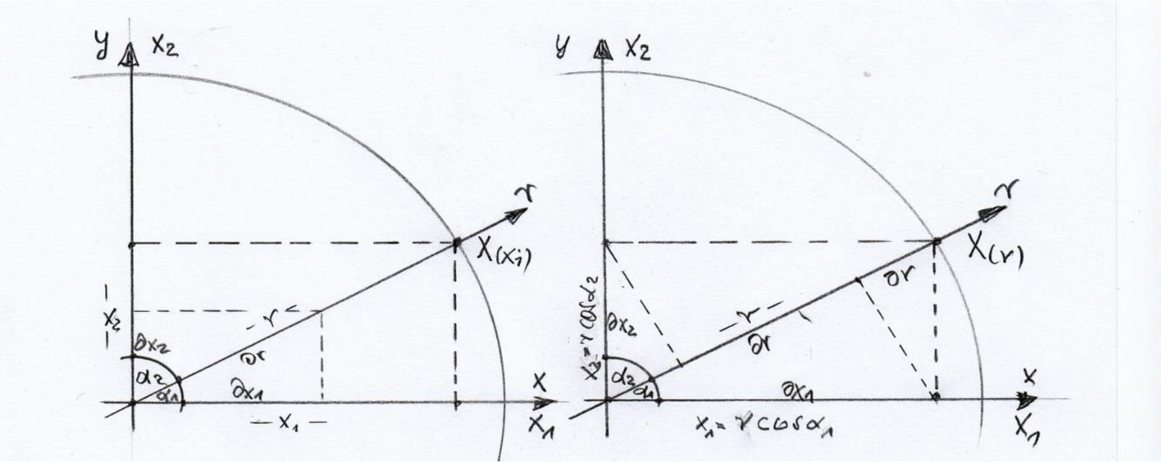
> senkrechte Projektionen auf die kartesischen Achsen (x_i) ergeben **kovariante** Vektorkomponenten (der Index steht unten),
> senkrechte Projektionen auf die radiale Achse (r) ergeben **kontravariante** Vektorkomponenten (der Index steht oben).
> Die unterscheidende Indexstellung wird nur bei dem Winkel α berücksichtigt.

Die beiden unterschiedlichen Projektionsrichtungen führen auf zwei mögliche Darstellungen eines Abstandes:

> Die kovarianten Komponenten führen auf eine **vektorielle** Abstands-Darstellung. Darunter wollen wir einen Abstand r verstehen, der aus Abstands-Komponenten unterschiedlicher Richtung besteht.
>
> die kontravarianten Komponenten führen auf eine arithmetische Abstands-Darstellung. Darunter verstehen wir einen Abstand r, dessen Komponenten alle gleichgerichtet sind und daher arithmetisch addiert werden können.

Ohne dass wir von Vektoren überhaupt reden, gibt es also zwei Möglichkeiten für die Darstellung von Abstand und Richtung. Sie ergeben sich durch die Möglichkeit, den Richtungskosinus cos α_i bzw. cos α^i in zwei verschiedenen, aber ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken zu ermitteln. Aus den beiden Bildern lesen wir ab:

kovariante Darstellung **kontravariante Darstellung**



<u>Bild links:</u>

$$\cos\alpha_i = \frac{x_i}{r} = \frac{\partial x_i}{\partial r}$$
$$r\cos\alpha_i = (x_i = r\,\frac{\partial x_i}{\partial r})$$

<u>Bild rechts:</u>

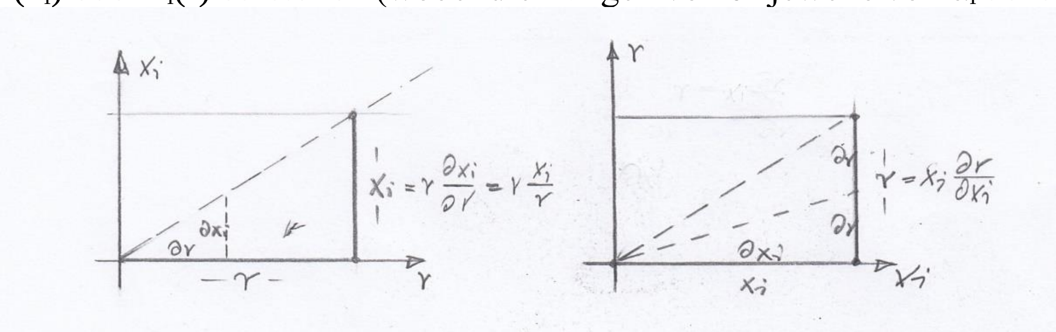
$$\cos\alpha^i = \frac{\partial r}{\partial x_i}$$
$$x_i\cos\alpha^i = (r = x_i\,\frac{\partial r}{\partial x_i})$$

Durch Klammern angedeutet ergeben sich zwei Formen einer linearen Abstandsfunktion für r und x_i. Die beiden Ausdrücke sind bekannt als „Grundform der Linearen Algebra“. Ergänzt man jeweils auf beiden Seiten der Gleichungen die Basisvektoren $\mathbf{g_i}$ bzw. $\mathbf{g_r}$, so ergeben sich die Ortsvektoren in kovarianter bzw. kontravarianter Form:

$\mathbf{r} = x_i\,\mathbf{g}_i = r\cos\alpha_i\,\mathbf{g}_i$ und $\mathbf{r} = r\,\mathbf{g}_r = x_i\cos\alpha^i\,\mathbf{g}_r$

Die Darstellung im Bild oben rechts zeigt, dass der kontravariante Richtungskosinus nur als Differential darstellbar ist. Den Abstand r erhält man als Summe über ($_i$) der gleichgerichteten Projektionen ∂r der kartesischen Komponenten auf die Vektorachse.
Die Herleitung begründet die Möglichkeit einer reziproken Darstellung des Richtungskosinus $\cos\alpha_i$ bzw. $\cos\alpha^i$ in Abhängigkeit von einer kovarianten bzw. einer kontravarianten Darstellung.

Die beiden Zusammenhänge lassen sich auch in Form reziproker Abhängigkeiten $r(x_i)$ oder $x_i(r)$ darstellen (wobei die Längen von ∂r jeweils von α_i abhängen):



Selbstverständlich müssen die beiden Formen des Richtungskosinus gleich sein:

$$\cos \alpha_i = \cos \alpha^i$$
$$\frac{x_i}{r} = \frac{\partial r}{\partial x_i}$$

daraus folgt: $\int x_i \partial x_i = \int r \partial r \quad \leftrightarrow \quad \frac{x_i^2}{r^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{r^2}$

und $\cos^2 \alpha_i = 1$

der Satz des Pythagoras. Für die Darstellung von Vektoren ist dies ein Fundamentalzusammenhang, der beim Rechnen mit Vektoren regelmäßig auftritt. Voraussetzung für die Gültigkeit ist, dass die Winkel α_i zu rechtwinkligen und ähnlichen Dreiecken gehören.
Das Ergebnis zeigt ferner, dass eine Unterscheidung der beiden Kosinusformen durch unterschiedliche Indizes zur Erläuterung eines geometrischen Zusammenhanges hilfreich ist.
Schließlich untersuchen wir das Produkt der beiden Formen des Richtungskosinus:

$$\cos \alpha_i \cos \alpha^i = \frac{x_i}{r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = 1$$

oder umgeformt:

$$x_i \frac{\partial r}{\partial x_i} = r \quad \rightarrow \quad x_i \cos \alpha^i = r$$
$$r\, x_i / r \cos \alpha^i = r \quad \rightarrow \quad \cos \alpha_i \cos \alpha^i = 1$$

Wir können den hochgestellten Index auch als formalen Unterschied auffassen, es handelt sich schließlich um die gleichen Winkel α, jedoch in verschiedenen, aber ähnlichen Dreiecken. Also gilt

$$\cos \alpha_i \cos \alpha^i = \cos^2 \alpha_i = 1$$

Es gibt also zwei Formen des Pythagoras: eine kovariante und eine kontravariante. Das arithmetische Ergebnis beider Formen ist gleich, sie beschreiben aber einen unterschiedlichen geometrischen Zusammenhang.

Die Unterscheidung kovarianter und kontravarianter Abstandsformen wollen wir durch die Stellung des Index nur beim Richtungskosinus berücksichtigen. Dabei behalten wir aber im Sinn, dass $\cos\alpha^i$ das Ergebnis eines partiellen Differentials ist, bei dem der Index ($_i$) im Nenner steht:

$\cos \alpha_i = x_i/r = \partial x_i/\partial r$ kovariante Form
$\cos \alpha^i = \partial r/\partial x_i$ kontravariante Form

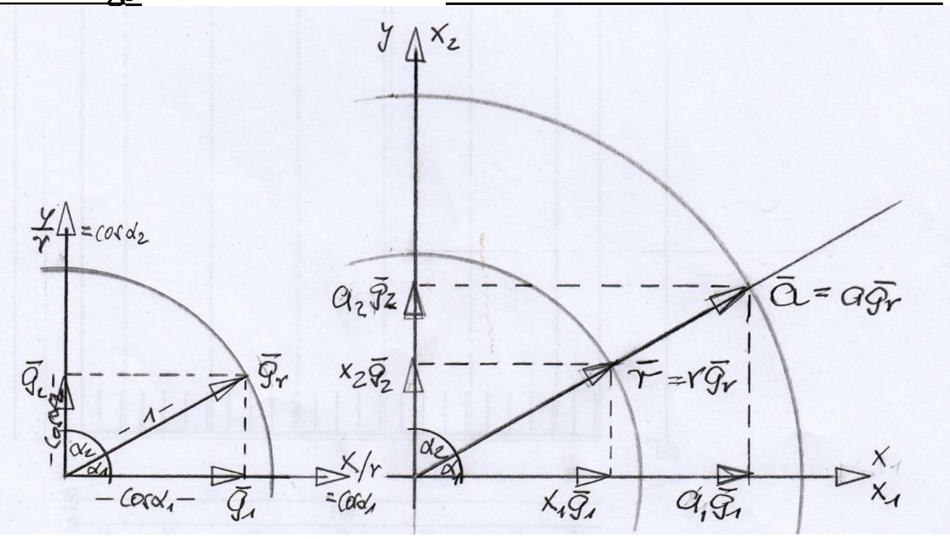
Es handelt sich aber immer um den gleichen Winkel α_i, der in ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken gefunden wird. Die Unterscheidung kann sinnvoll sein, wenn geometrische Zusammenhänge dargestellt werden sollen, sie kann entfallen, wenn die Zusammenhänge ohnehin klar sind.

9. Der Ortsvektor

Der Ortsvektor **r** ist ein „gerichteter Abstand“, er beschreibt die Lage eines unverschieblichen Ortes in Bezug auf den Ursprung des Koordinatensystems. Jedem Ort des Raumes ist ein Ortsvektor zugeordnet.
Der geometrische Ort aller Orte gleichen Abstandes vom Ursprung liegt auf einer Kugel mit dem Radius r um den Ursprung. Der Vektor **r** wird daher auch als Radiusvektor bezeichnet.
Der Einheitsvektor wird in einem eigenen Bild dargestellt, da er die Dimension 1 hat und nicht die Dimension einer Länge. Die zugehörigen Koordinatenachsen haben dann die Dimension:

$$\frac{x_i}{r} = \cos \alpha_i$$

<u>Einheitsvektor $\mathbf{g_r}$</u> : <u>Ortsvektor **r** + Abstandsvektor **a**</u> :



Mit den Bezeichnungen

r	Ortsvektor
|**r**| = r	Abstand, Betrag des Ortsvektors
r/r = $\mathbf{r_0}$ = $\mathbf{g_r}$ = **1**	Einheitsvektor des Ortsvektors, Basisvektor
|$\mathbf{r_0}$| = 1	Betrag des Einheitsvektors des Ortsvektors

ergeben sich folgende gleichberechtigte Schreibweisen für den Ortsvektor:

$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r_0} = r\,\mathbf{g_r}$ symbolische Schreibweise

analytische oder Index-Schreibweise:

$\mathbf{r} = x_i\,\mathbf{g_i} = (r \cos \alpha_i)\,\mathbf{g}_i$ kovariant

$\mathbf{r} = \Sigma\,\mathbf{x}_i = \Sigma\, r\,\mathbf{g}_i = \mathbf{r}\,\Sigma \cos\alpha_i$ (vektoriell)

$\mathbf{r} = r\,(\cos\alpha^i\,\mathbf{g}_i) = \mathbf{x}_i \cos\alpha^i$ kontravariant

Zu beachten ist, dass r nur für den Abstand steht und keine Richtung hat, während $\mathbf{g}_i$ und $\mathbf{g}_r$ nur für eine Richtung stehen und keine geometrische Länge haben, also z.B. $\mathbf{x}_i = r\,\mathbf{g}_i$ und $\mathbf{g}_i = \frac{\bar{x}_i}{r} = \cos\alpha_i\,\mathbf{g}_r$

10. Der Abstandsvektor

Der Abstandsvektor **a** beschreibt die Lage eines verschieblichen materiellen Punktes in Bezug auf den Ursprung des Koordinatensystems, er wird daher auch als materieller Vektor bezeichnet. Der Abstandsvektor ist wie der Ortsvektor ein Radiusvektor, der Abstand a hat keine Richtung.
Mit den Bezeichnungen

$\mathbf{a}$	Abstandsvektor
$\lvert\mathbf{a}\rvert = a$	Abstand, Betrag des Vektors
$\mathbf{a}/a = \mathbf{a_0} = \mathbf{g_r} = \mathbf{1}$	Einheitsvektor des Abstandsvektors, Basisvektor
$\lvert\mathbf{a_0}\rvert = 1$	Betrag des Einheitsvektors des Ortsvektors

ergeben sich folgende gleichberechtigte Schreibweisen für den Abstandsvektor:

$$\mathbf{a} = a\,\mathbf{a_0} = a\,\mathbf{g_r} = \frac{a}{r} r\,\mathbf{g_r} = \left(\frac{a}{r}\right)\mathbf{r} \quad \text{aber: } \mathbf{a} = \Sigma\,\mathbf{a}_i = a_i\,\mathbf{g_i}$$

$$\mathbf{a} = a_i\,\mathbf{g_i} = \frac{a_i}{a}\frac{a}{r} r\,\mathbf{g_i} = \cos\alpha_i \left(\frac{a}{r}\right) r\,\mathbf{g_i} = \frac{\partial a}{\partial r} r \cos\alpha_i\,\mathbf{g_i} = \frac{\partial a}{\partial r} x_i\,\mathbf{g_i}$$

Die einzelnen Schritte können leicht anhand der Dreiecke im Bild nachvollzogen werden. Es wird deutlich, dass die Ähnlichkeit der maßgebenden Dreiecke vorausgesetzt wird. Dies gilt insbesondere auch für den Basisvektor, vgl. hierzu die Ausführungen weiter unten.

Der Ausdruck $\frac{a}{r} = \frac{\partial a}{\partial r}$ $\quad\rightarrow\quad$ $\mathbf{a} = \mathbf{r}\left(\frac{\partial a}{\partial r}\right)_{r=0} = r\left(\frac{\partial \bar{a}}{\partial r}\right)_{r=0}$
ist ein Skalenfaktor, der die lineare Abbildung eines materiellen Punktes auf die Achse des Ortsvektors bewirkt.
Es handelt sich hier um einen fundamentalen Zusammenhang, der die Grundlage der linearen Algebra bildet: die Abstände a und r liegen auf einer Geraden.

Für den Skalenfaktor verwenden wir die Symbole der partiellen Ableitung, weil der Abstand a eine Funktion von r und x_i ist:

$$a = a_{(r,\, xi)}$$

und

$$\frac{\partial a}{\partial x_i} = \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial a}{\partial r}\cos\alpha^i$$

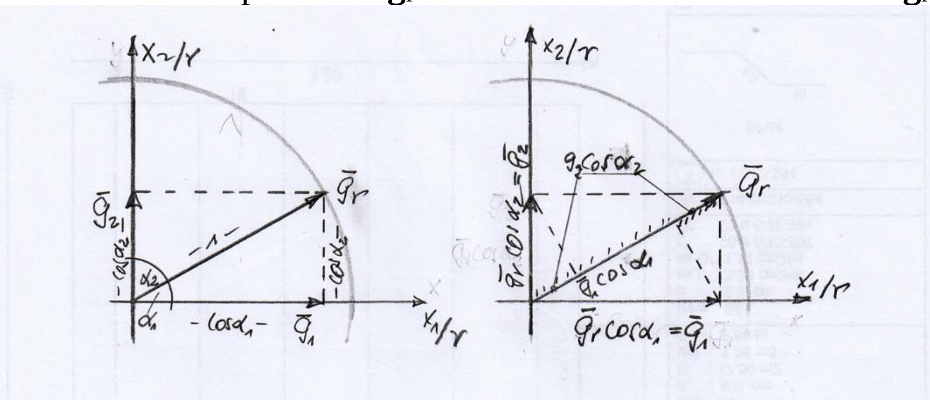
Wenn auch nicht auf Anhieb erkennbar, so ist der Skalenfaktor doch nach der Kettenregel Teil einer partiellen Differentiation. Das veranlasst uns dem Ausdruck seine partiellen Symbole zu belassen, zumal der Skalenfaktor im Weiteren für die Vektorrechnung eine wesentliche Bedeutung erlangt, z. B als Transformations-koeffizient und als Divergenz eines Vektors.

11. Der Basisvektor

Für die Darstellung von Vektoren verwenden wir Basisvektoren. Ein Basisvektor kennzeichnet die Richtung eines Vektors bezüglich der Achsen des kartesischen Koordinatensystems.

Der Einheitsvektor eines Vektors ergibt sich als Division eines Vektors durch seinen Betrag. Er hat die Dimension 1 und die Richtung des Vektors. **Hieraus leiten wir die Vorstellung ab, den Einheitsvektor als Richtungsvektor und Basisvektor $\mathbf{g}_r$ eines Vektors zu definieren.**

kovariante Basiskomponenten $\mathbf{g}_i$: kontravariante Basis $\mathbf{g}_r$:



Aus der Darstellung ergibt sich folgende Herleitung für einen Einheitsvektor in Index-Schreibweise und in symbolischer Schreibweise:

$\mathbf{r} = x_i\, \mathbf{g_i}$ $\qquad$ $\mathbf{r} = r\, \mathbf{g_r}$

$\mathbf{r_0} = \frac{x_i}{r}\, \mathbf{g_i} = \cos \alpha_i\, \mathbf{g_i} = \mathbf{g}_r$ $\qquad$ $\mathbf{r_0} = \frac{\bar{r}}{r} = \mathbf{g_r} = \cos \alpha^i\, \mathbf{g_i}$

Aus dem Bild links ergibt sich für den Basisvektor $\mathbf{g}_r$ in kovarianter Form:

$$\mathbf{g}_r = \cos \alpha_i\, \mathbf{g}_i$$

Aus dem Bild rechts ergibt sich für den Basisvektor $\mathbf{g}_r$ in kontravarianter Form:

$$\mathbf{g}_r = \cos \alpha^i\, \mathbf{g}_i$$

Damit ergeben sich für den Basisvektor und seine Komponenten die Beziehungen:

		$\mathbf{g}_r = \cos \alpha^i\, \mathbf{g}_i$	kontravariante Basis
$\mathbf{g}_r = \cos \alpha_i\, \mathbf{g_i}$	und:	$\mathbf{g}_i = \cos \alpha_i\, \mathbf{g}_r$	kovariante Basis bzw -komponente
aber:		$\mathbf{g_r} = \boldsymbol{\Sigma}\, \mathbf{g_i} = \boldsymbol{\Sigma} \cos\alpha_i\, \mathbf{g}_r$	(vektorielle Darstellung)

Wir bemerken, dass $\mathbf{g}_i$ immer als kovariante Basiskomponente dargestellt wird, während $\mathbf{g}_r$ sowohl kovariant (d.h. vektoriell) wie auch kontravariant (d.h. arithmetisch) dargestellt werden kann.
Den kontravarianten Basisvektor und seine Komponenten bezeichnet man auch als duale oder reziproke Basis. Reziprok deshalb, weil der Zusammenhang, der nur in dem kleineren Teildreieck abgelesen werden kann, zu einer reziproken Form des Richtungskosinus führt.

In der vektoriellen Darstellung muss das Summenzeichen mitgeführt werden, da der Index $_{(i)}$ nur einfach vorkommt, und daher keine Summenbildung vereinbart ist.

Die Unterscheidung zwischen kovarianter und kontravarianter Basis ist für rechtwinklige kartesische Koordinatensysteme nicht üblich und auch nicht erforderlich.

Das hier eingeführte Koordinatensystem ist jedoch bezüglich des resultierenden Basisvektors $\mathbf{g_r}$ nicht rechtwinklig. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit unterschiedliche Basiskomponenten zu definieren, um besondere geometrische Zusammenhänge zu erläutern.

Die Beziehungen zwischen Basisvektor und seinen Komponenten ergeben sich aus den beiden Darstellungen:

	$\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_r \cos \alpha_i$	kovariante Basiskomponente
und	$\mathbf{g}_r = \mathbf{g}_i \cos \alpha^i$	Basisvektor kontravariant
	$\mathbf{g}_r = \mathbf{g_i} \cos \alpha_i$	Basisvektor kovariant

Der Ortsvektor in den Formen

$\mathbf{r} = x_i\, \mathbf{g_i}$ und $\mathbf{r} = r\, \mathbf{g_r}$

ist eine lineare Funktion von x_i, die Komponenten des Basisvektors sind ortsunabhängig. Die kartesischen Basisvektoren können daher durch die partiellen Ableitungen des Ortsvektors **r** ausgedrückt werden:

$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x_i} = \bar{g}_i$ und $\frac{\partial \bar{r}}{\partial r} = \bar{g}_r$

Die Darstellung $= \frac{\partial a}{\partial r}\, x_i\, \mathbf{g_i} = \frac{\partial a}{\partial r}\, r\, \mathbf{g}_r = a\, \mathbf{g_r}$

macht deutlich, **dass ein Vektor als Produkt aus Abstand und Richtung aufgefasst werden kann, wenn man den Basisvektor $\mathbf{g_r}$ als Richtungsvektor ansieht.**

Da der Vektor und der Basisvektor in einem linearen Zusammenhang stehen, ist auch eine Darstellung mit Differentialen möglich:

$\mathbf{r} = x_i\, \mathbf{g}_i$	$\partial r\, \mathbf{g}_r = \partial x_i\, \mathbf{g_i}$	$\bar{g}_r = \frac{\partial x_i}{\partial r}\, \bar{g}_i$	$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x_i} = \mathbf{g_i}$	† $(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x_i} = \mathbf{g_i})$ †
$\mathbf{r} = r\, \mathbf{g}_r$	$\partial \mathbf{r} = \partial r\, \mathbf{g_r}$	$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{r}}}{\partial \boldsymbol{r}} = \mathbf{g_r}$	$\frac{\partial \boldsymbol{x_i}}{\partial \boldsymbol{r}} \mathbf{g}_i = \mathbf{g_r}$	$r\, \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} = \mathbf{r}$

Für den mit † (   ) † gekennzeichneten Ausdruck könnten Zweifel bestehen, ob die Formulierung zulässig ist, weil der Ausdruck auch aus der zweiten Gleichung der

Zeile entsteht, indem man die indizierten Terme trennt. Das ist formal nicht zulässig. Der Umgang mit den Schreibweisen ist gelegentlich nicht eindeutig und muss hinterfragt werden. Das wollen wir tun, und wir fügen die Basisvektoren in die Ausgangsgleichungen ein:

$$\mathbf{r} = x_i\, \mathbf{g}_i = x_i \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_i} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r} = r\, \mathbf{g}_r = r \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} = \mathbf{r}$$

Wir erhalten zwanglos die Linearbedingung der Algebra und haben damit gezeigt, dass der Basisvektor und seine Komponenten als Ableitungen des zugehörigen Ortsvektors und seiner Komponenten aufgefasst werden können.

Bei vielen Nutzern von Vektoren hat sich eingebürgert die Basisvektoren bei Rechnungen mit Vektoren wegzulassen. Das ändert die Richtigkeit einer Gleichung in den meisten Fällen nur dann nicht, wenn auf beiden Seiten der Gleichung der gleiche Basisvektor weggelassen wird. Darüber hinaus ist zu beachten, dass der verkürzten Darstellung eine wesentliche Information fehlt, nämlich die der Richtung des Vektors, und diese wird möglicherweise für die nächste Rechenoperation benötigt. Es gibt Fälle, bei denen das Fehlen der Basisvektoren zu widersprüchlichen Ergebnissen führt.

Aus diesem Grunde sollen im Folgenden die Basisvektoren regelmäßig mitgeführt werden. Umformungen werden hierdurch erleichtert, die Übersicht ist besser. Der korrekte Wechsel vom Vektor zu seinen Komponenten ist formal nur unter Berücksichtigung des Basisvektors möglich.

Zusammenfassung: Der Basisvektor und seine Komponenten

Als Basisvektor bezeichnen wir den Einheitsvektor des Ortsvektors **r** oder des Abstandsvektors **a:**

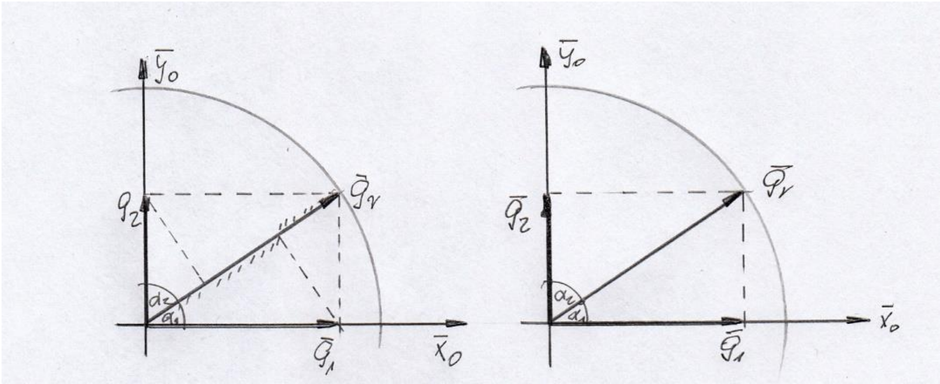
$$\bar{g}_r = \frac{\bar{r}}{r} = \frac{\bar{a}}{a} = \frac{x_i}{r}\bar{g}_i = \frac{a_i}{a}\bar{g}_i \qquad \text{mit } \frac{x_i}{r} = \frac{a_i}{a} = cos\,\alpha_i$$

(Richtungskosinus)

Die Richtungskosinus ergeben sich in zwei verschiedenen rechtwinkligen Dreiecken:

als kovariante Projektion des Vektors mit cos α_i auf die kartesischen Achsen

als kontravariante Projektion der Vektorkomponenten mit cos α^i auf die Achse des Basisvektors $\mathbf{g}_r$



Die beiden Richtungskosinus haben wir durch die unterschiedliche Stellung des Index i gekennzeichnet: $\cos \alpha_i$ und $\cos \alpha^i$. Für den Basisvektor bzw. für seine Komponenten lesen wir die folgenden Beziehungen ab:

1 $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_r \cos \alpha_i$ mit $\cos \alpha_i = \frac{x_i}{r} = \frac{\partial x_i}{\partial r}$

Der Basisvektor $\mathbf{g}_r$ wird kovariant auf die Achse x_i projiziert.

2 $\mathbf{g}_r = \mathbf{g}_i \cos \alpha^i$ mit $\cos \alpha^i = \frac{\partial r}{\partial x^i}$

Der Basisvektor wird dargestellt als arithmetische Summe der kontravarianten Projektionen von $\mathbf{g}_i$ auf seine Achse.

3 $\mathbf{g}_r = \Sigma\, \mathbf{g}_i$

Der Basisvektor wird dargestellt als vektorielle Summe seiner kartesischen Vektorkomponenten.

Es ergeben sich folgende Beziehungen:

$\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_r \cos \alpha_i$	$\mathbf{g}_r = \mathbf{g}_i \cos \alpha^i$	$\mathbf{g}_r = \Sigma\, \mathbf{g}_i$
$\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i \cos \alpha^i \cos\alpha_i$	$\mathbf{g}_r = \mathbf{g}_r \cos \alpha_i \cos\alpha^i$	$\mathbf{g}_r = \Sigma\, \mathbf{g}_r \cos \alpha_i$
	$\bar{g}_r = \bar{g}_r \frac{x_i}{r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \bar{g}_r =$	$\mathbf{g}_r = \Sigma\, \mathbf{g}_r \frac{x_i}{r} = \mathbf{g}_r$

Der Ausdruck $\frac{x_i}{r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = 1$ führt auf die lineare Vektorfunktion r (x_i): $r = x_i \frac{\partial r}{\partial x_i}$

In der symbolischen Schreibweise $\mathbf{r} = r\, \mathbf{g}_r$ ist der Ortsvektor hinsichtlich seiner Richtung nicht festgelegt. Mit **r** sind alle Orte gemeint, die auf einem Kreis oder einer Kugel mit dem Radius r liegen. Der Ortsvektor ist also ein Radiusvektor. Will man einen bestimmten Ort festlegen, muss man einen Satz Komponenten x_i oder Winkel α_i wählen. Die Wahl ist aber nicht frei, vielmehr muss die Orthogonalitätsbedingung des Pythagoras erfüllt werden. In diesem Sinne sind alle Vektoren Radiusvektoren, also auch die Basis- und Abstandsvektoren.

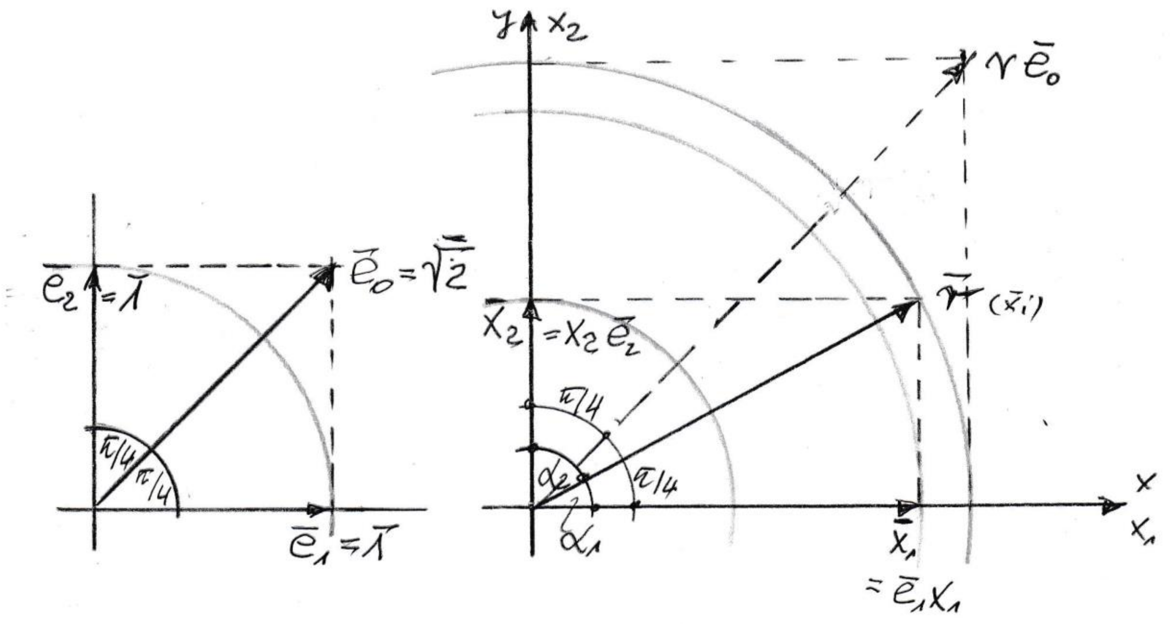
12. Abgrenzung zu den Basisvektoren $\mathbf{e}_i$

Mit der Wahl der Bezeichnung $\mathbf{g}_r$ und $\mathbf{g}_i$ für den Basisvektor bzw. seine Komponenten wurde bewusst auf die in der älteren Literatur übliche Bezeichnung für Basisvektoren zurückgegriffen, um die $\mathbf{g}_i$ von den heute üblichen Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ abzugrenzen, da diese mit den hier eingeführten Komponenten des Basisvektors g_r **nicht kompatibel** sind.

Üblicherweise werden die **Komponenten** $\mathbf{e}_i$ als **drei Basisvektoren** definiert:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{1}$$

Ein resultierender Basisvektor ist nicht vorgesehen, wir wollen ihn hier mit $\mathbf{e}_0$ bezeichnen.



Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ Ortsvektor $r = x_i\,\mathbf{e}_i$

Aus dem Bild ist zu ersehen, dass wegen der konstanten Komponenten der Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ auch der resultierende Basisvektor $\mathbf{e}_0$ ein kontanter Richtungsvektor ist. Sowohl Betrag als auch Richtung sind unveränderlich, sein Betrag ist nicht gleich 1 sondern $\sqrt{2}$, bzw. $\sqrt{3}$ im räumlichen Fall.
Dieser Basisvektor und seine Komponenten können daher keine Abbildung der Richtung eines Vektors sein.

Das führt zu Widersprüchen, was an einer einfachen Umformung eines Vektors **a** gezeigt werden soll. Für die Umformungen verwenden wir die Regeln der Algebra. Formale Vereinbarungen z.B. die Verwendung des Skalarprodukts sollen nicht gelten.

13. Umformung

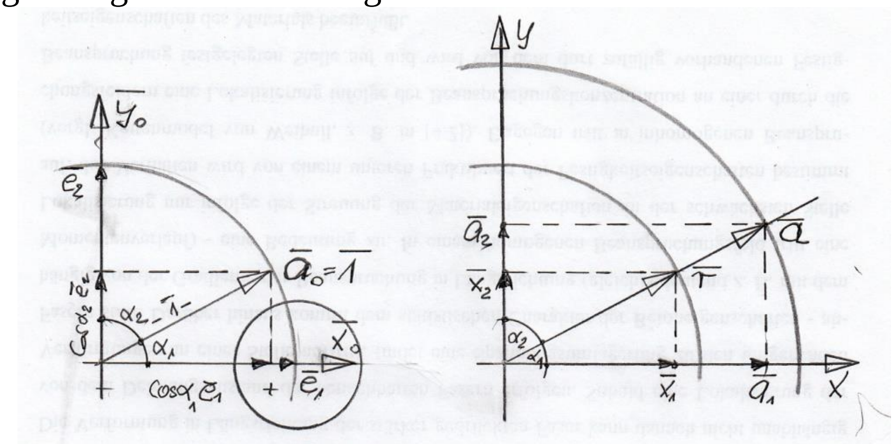
Wir betrachten einen Vektor **a,** der unter Verwendung der Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ dargestellt ist:

$$\mathbf{a} = a_i\, \mathbf{e}_i$$

Wir können den zugehörigen Einheitsvektor $\mathbf{a}_0$ bilden, indem wir durch den Betrag a = |**a**| dividieren:

$$\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{a} = \frac{a_i}{a}\,\bar{e}_i = \cos\alpha_i\,\bar{e}_i$$

Dabei sind die cos α_i die Richtungskosinus, die die Richtung des Vektors **a** bestimmen. Die (cos α_i $\mathbf{e}_i$) sollen die vektoriellen Komponenten des Einheitsvektors $\mathbf{a}_o$ sein.
Das ergibt folgende Darstellung:



Anschauungsraum
des Einheitsvektors der Vektorrechnung

Bild rechts stellt den **geometrischen Anschauungsraum** der Vektorrechnung dar mit:

$$\mathbf{a} = a_i\, \mathbf{e}_i = a \cos\alpha_i\, \mathbf{e}_i = \frac{a}{r}\, x_i\, \mathbf{e}_i$$

und $$\mathbf{r} = x_i\, \mathbf{e}_i = r \cos\alpha_i\, \mathbf{e}_i$$

Darin sind

der Vektor **a** der einen verschieblichen Punkt beschreibende „materielle“ Vektor,

der Vektor **r** der einen festen Ort beschreibende Ortsvektor.

Beide Vektoren sind linear, von gleicher Richtung und mit dem Ursprung des Koordinatensystems verbunden. Die Darstellung ist widerspruchsfrei, weil in den Gleichungen die „Richtung“ nicht vorkommt. Der Faktor „cosα_i“ ist hier Transformationsfaktor und nicht Richtungskosinus.

Bild links stellt den **Anschauungsraum der Einheitsvektoren** dar. Mathematisch haben die dargestellten Vektorlängen die Dimension einer Zahl**.** So hat z.B. der Einheitsvektor $\mathbf{a}_o$ die Länge **1**. Wir versehen die Zahl „1“ mit einem Überstrich (oder Fettdruck) um anzudeuten, dass es sich um eine vektorielle Größe handelt. Ein solches gerichtetes Element mit dem Wert einer Zahl wollen wir als „Richtung“ auffassen. Der Wert dieser Zahl wird in der Regel durch einen Richtungskosinus dargestellt.

Die Vektoren $\mathbf{e}_i$ haben die Länge **1** und sind die Basisvektoren der mit den Koordinatenachsen verbundenen Achsvektoren $\mathbf{x}_i$ bzw. $\mathbf{a}_i$.

Das bedeutet auch, dass die Faktoren des Produktes (x_i $\mathbf{e}_i$), nämlich x_i und $\mathbf{e}_i$, nicht einem gemeinsamen rechtwinkligen Dreieck angehören. Wie weiter unten gezeigt wird, entfällt hierdurch eine Voraussetzung für die Anwendung der Einstein´schen Summenkonvention.
Die Vektoren $\mathbf{e}_i$ werden üblicherweise als Basisvektoren definiert. Wie bereits gezeigt, wird mit der Einführung von zwei (bzw. drei) Einheitsvektoren als Basisvektoren in der Ebene (bzw. im Raum) auch eine Richtung der Resultierenden mit $\alpha_1 = \alpha_2 = ¼\pi$, (bzw. cos $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{3}}$) festgelegt. **Dadurch ist eine Anpassung der Richtung der Resultierenden an die Richtung des Vektors nicht möglich.** Die Richtung ist jedoch eine wesentliche Eigenschaft eines Vektors, die auch der Basisvektor darstellen sollte.
Für den Vektor $\mathbf{a} = a_i\, \mathbf{e}_i$
und den zugehörigen Einheitsvektor

$$\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{a} = \frac{a_i}{a}\bar{e}_i = cos\,\alpha_i\,\bar{e}_i$$

haben wir wie selbstverständlich die Gültigkeit der Summenkonvention angenommen. Das wollen wir überprüfen, der Einfachheit halber für den ebenen Fall.

$$\bar{a}_0 = cos\,\alpha_i\,\bar{e}_i$$

ausgeschrieben: $\mathbf{a}_0 = \cos\alpha_1\,\mathbf{e}_1 + \cos\alpha_2\,\mathbf{e}_2$

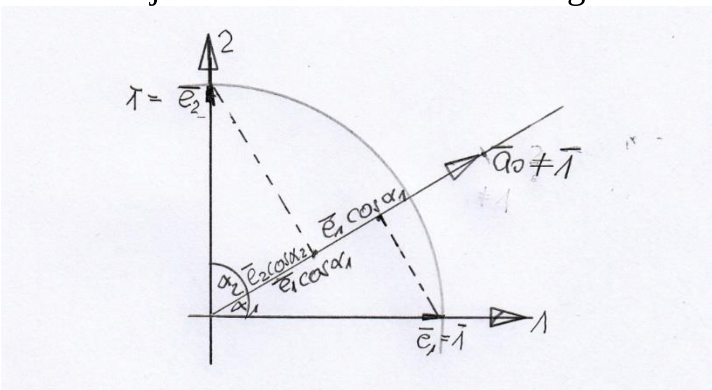
Die Summanden sind zwei Vektorkomponenten, die senkrecht aufeinander stehen, also unterschiedliche Richtung haben. Ohne weiteres kann man die Komponenten nur als Krafteck vektoriell addieren.

Das Ergebnis erinnert formal an die vektorielle Darstellung unter Verwendung der kovarianten Komponenten des Vektors.

Bei genauerem Hinsehen unter Berücksichtigung der bildlichen Darstellung bemerken wir jedoch, dass die Vektorkomponenten keine kovarianten Projektionen sind. Die beiden Faktoren x_i und $\mathbf{e}_i$ gehören nicht zu einem gemeinsamen rechtwinkligen Dreieck, in dem die kovariante Projektion ausgeführt werden könnte.

Das ist eine zeichnerische oder vektorielle Lösung für $\mathbf{a}_0$. Wir suchen aber eine arithmetische Lösung. Dazu projizieren wir die Basisvektoren e_i auf die Vektorachse $\mathbf{a}_o$ Die Komponenten haben dann eine gemeinsame Richtung, so dass wir die Anteile addieren können.

Das Ergebnis der Projektionen ist in dem nachfolgenden Bild dargestellt:



Die Summe der Projektionen ergibt aber nicht den zu erwartenden Wert $\mathbf{a}_0 = \mathbf{1}$, bzw. a = 1. Das ist dem Bild zu entnehmen, nämlich:

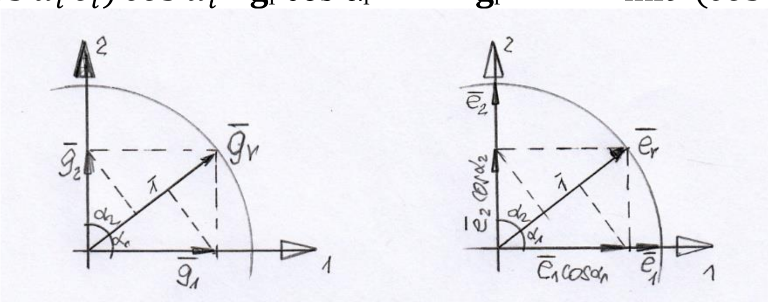
mit $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{1}$

$$|\mathbf{a}_0| \neq \cos\alpha_1\, |\mathbf{e}_1| + \cos\alpha_2\, |\mathbf{e}_2| = (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)\, |\mathbf{e}_r|$$

Offenbar ist die Verwendung der Summenkonvention nicht zulässig.
Hierfür spricht, dass die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i$ nicht Teil der rechtwinkligen Dreiecke sind, in denen $\mathbf{a}_0 = \mathbf{e}_r$ auf die Koordinatenachsen projiziert werden. (vgl. nachfolgendes Bild, rechts).

In einem zweiten Versuch fassen wir die Ausdrücke ($\cos\alpha_i\, \mathbf{e}_i$) als Vektorkomponenten $\mathbf{g_i}$ auf, projizieren sie auf die Vektorachse und summieren die Anteile über i:

$$\bar{a}_0 = (\cos\alpha_i\, \bar{e}_i) \cos\alpha_i = \mathbf{g}_i \cos\alpha_i \quad = \mathbf{g}_r \qquad \text{mit } (\cos\alpha_i\, \bar{e}_i) = \bar{g}_i$$



Wir erhalten ein richtiges Ergebnis: der resultierende Basisvektor ist vom Betrag 1. Die Gleichung widerspricht allerdings den Regeln der Verwendung von Indizes, weil der Index i dreimal in dem gleichen Term auftritt. Das wollen wir vermeiden.

In einem dritten Versuch fassen wir die Vektorkomponenten auf als Projektion des Einheitsvektors $\mathbf{e}_r$ auf die Achsen und definieren:

$$(\mathbf{e}_i \cos\alpha_i) = \mathbf{e}_r \cos\alpha_i$$

und erhalten für $\mathbf{a}_0$, indem wir wieder auf die Vektorachse projizieren:

$$\mathbf{a}_0 = (\cos\alpha_i\ \mathbf{e}_r)\cos\alpha_i = \mathbf{g}_r = \mathbf{g}_i \cos\alpha_i$$
$$\mathbf{a}_0 = \cos^2\alpha_i\ \mathbf{e}_r = \cos^2\alpha_i\ \mathbf{g}_r = \mathbf{g}_r$$

Diesen Ausdruck können wir ausschreiben und können die Anteile addieren. Wir erhalten mit dem Satz des Pythagoras eine Beziehung zwischen dem Einheitsvektor $\mathbf{a}_0$ bzw. $\mathbf{e}_r$ und dem neuen Basisvektor $\mathbf{g}_r$:

$$\mathbf{a}_0 = (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2)\ \mathbf{e}_r$$
$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{e}_r = \mathbf{g}_r$$

Damit wurde gezeigt, dass die Einführung des neuen Basisvektors $\mathbf{e}_r = \mathbf{g}_r$ zwanglos die Schwierigkeiten behebt, die mit den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i$ auftreten.

Wir schlagen deshalb vor, anstelle der drei Basisvektoren nur den Einheitsvektor $\mathbf{a}_0 = \mathbf{1}$ als Basisvektor zu definieren:

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_r = \mathbf{g}_r$$

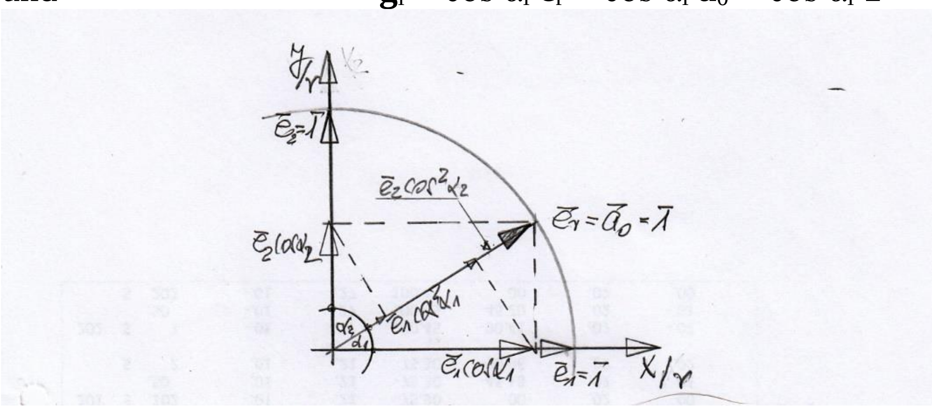
Dieser Basisvektor ist ein logischer Basisvektor, er hat den Betrag 1 und die Richtung des zugehörigen Vektors, und er kann wie ein Vektor jede Richtung im Raum haben. Die Richtung wird festgelegt durch die zugehörigen Richtungskosinus, die den räumlichen Pythagoras erfüllen müssen.
Wir definieren:

$$\mathbf{e}_1 \cos\alpha_1 = \mathbf{g}_1 \qquad \mathbf{e}_2 \cos\alpha_2 = \mathbf{g}_2 \qquad \mathbf{e}_3 \cos\alpha_3 = \mathbf{g}_3$$

und erhalten als Ergebnis die Grundform unseres neu eingeführten Basisvektors:

$$\mathbf{g}_i \cos\alpha_i = \mathbf{e}_r = \mathbf{a}_0 = \mathbf{g}_r = \mathbf{1}$$

und $$\mathbf{g}_i = \cos\alpha_i\ \mathbf{e}_r = \cos\alpha_i\ \mathbf{a}_0 = \cos\alpha_i\ \mathbf{1}$$



Diese Umformung ist widerspruchsfrei. Die gewählten Richtungsvektoren entsprechen dem oben eingeführten neuen Basisvektor und seinen Komponenten, wenn man definiert:

$$\mathbf{g}_r = \mathbf{a}_o \quad = \quad \mathbf{g}_i \cos\alpha_i$$
$$\mathbf{g}_i = \mathbf{a}_o \cos\alpha_i = \quad \mathbf{g}_r \cos\alpha_i$$

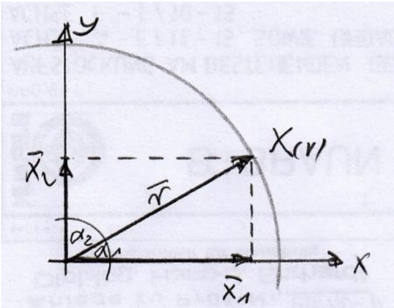
Wir erhalten als Ergebnis, dass die Wahl konstanter Basiskomponenten $\mathbf{e_i}$ als Einheitsvektoren zu widersprüchlichen Ergebnissen führt.
Die Widersprüche haben damit zu tun, dass die Basisvektoren $\mathbf{e_i}$ nicht allgemein die Richtung des Vektors abbilden.
Vielmehr führt nur die vektorielle (zeichnerische) Darstellung auf ein richtiges Ergebnis nicht aber eine arithmetische Darstellung.

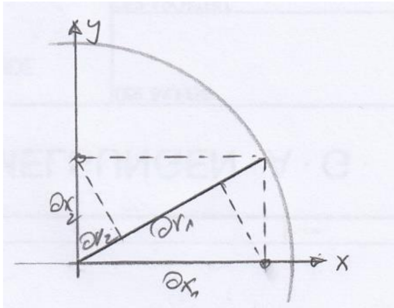
Hieraus leiten wir die Notwendigkeit her, die Vektorrechnung auf eine neue Form des Basisvektors umzustellen. Der neue Basisvektor $\mathbf{g_r}$ enthält über seine Komponenten die Information der Richtung des Vektors. Die Komponenten und damit auch der Basisvektor können durch die Bedingung des räumlichen Pythagoras an jede Richtung angepasst werden.

14. Vektorielle und arithmetische Vektorform

Die vektorielle und die arithmetische Darstellungsform eines Ortsvektors wollen wir noch einmal gegenüberstellen.

In der vektoriellen Darstellung werden die kovarianten Komponenten wie in einem Kräftedreieck zu einem resultierenden Vektor addiert, während in der arithmetischen Darstellung die kontravarianten Projektionen auf die Vektorachse arithmetisch addiert werden.





Vektorielle Darstellung

Ausgehend von der **kovarianten** Darstellung formen wir um:
aus
$\mathbf{r} = x_i\, \mathbf{g_i}$ mit $x_i = r \cos\alpha_i$
und $\mathbf{g_i} = \mathbf{g_r} \cos\alpha_i$
folgt
$\mathbf{r} = (r \cos\alpha_i)\ (\mathbf{g_r} \cos\alpha_i)$
(Abstand) (Richtung)
$\mathbf{r} = \mathbf{r} \cos\alpha_i \cos\alpha_i$ $= (r \cos \alpha_i)\ \mathbf{g_i}$
$\mathbf{g}_r = \cos \alpha_i\ \mathbf{g}_i$
und hieraus basisfrei:

$$\mathbf{\cos^2\alpha_i = 1}$$

$\cos\alpha_i = x_i / r$

$$cos^2\, \alpha_i = \left(\frac{x_i}{r}\right)^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{r^2} = 1$$

Dies ist die dimensionslose Grundform des Pythagoras.
Geometrische Deutung:
Die möglichen Richtungskosinus werden durch die geometrischen Bedingungen im rechtwinkligen räumlichen Dreieck vorgegeben (Pythagoras).

Arithmetische Darstellung

Ausgehend von der **kontravarianten** Darstellung formen wir um:
aus
$\mathbf{r} = \mathbf{x}_i \cos\alpha^i$ mit $\mathbf{x}_i = r\, \mathbf{g}_r \cos\alpha_i$
folgt
$\mathbf{r} = r\ \ (\mathbf{g}_r \cos\alpha_i \cos\alpha^i) = r\ (\cos\alpha^i\ \mathbf{g}_i)$
(Abstand) (Richtung)
$\mathbf{g}_r = \cos\, \alpha^i\ \mathbf{g}_i$

und hieraus basisfrei:

$$\mathbf{\cos\alpha_i \cos\alpha^i = 1}$$

$\cos\alpha^i = \partial r / \partial x_i$

$$\cos\alpha_i \cos\alpha^i = \frac{x_i}{r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = 1$$

folgt $r = x_i \dfrac{\partial r}{\partial x_i}$

Dies ist die Grundform der Linearen Vektorrechnung.
Geometrische Deutung:
Die Verbindungslinie vom Ursprung zum Ort $X_{(r)}$ ist eine Gerade.

15. Die Einstein´sche Summenkonvention

A. Einstein: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Physik, Bd. 49, 1916, (a.a.O. S. 781)

Die „Einstein´sche Summenkonvention" ist eine Vereinbarung zur Notation mathematischer Ausdrücke der Vektor- und Tensor-Rechnung.

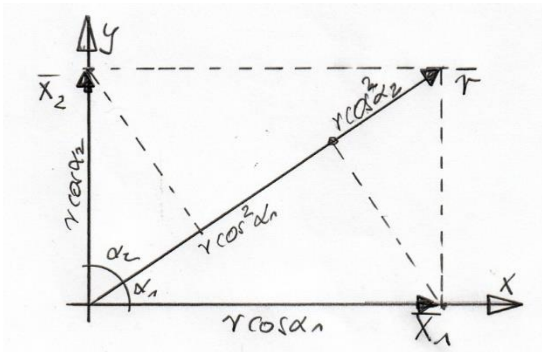
Die Konvention wurde von Albert Einstein vorgeschlagen. Zur Vereinfachung der Schreibweise und zur Verbesserung der Übersicht sollen Summenzeichen weggelassen und trotzdem über doppelt auftretende gleiche Indizes summiert werden. Als Beispiel möge die Index-Schreibweise eines Ortsvektors dienen:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{g}_i = x_i\, \mathbf{g}_i$$

ausgeschrieben für n=3: $\mathbf{r} = x_1\, \mathbf{g}_1 + x_2\, \mathbf{g}_2 + x_3\, \mathbf{g}_3$

Mit $\mathbf{g}_i$ sind die Komponenten des Basisvektors $\mathbf{g}_r$ gemeint, vektorielle Größen, die für die Richtung der zugehörigen Vektorkomponenten stehen. Mit x_i definieren wir die Komponente des Abstandes r auf der Achse x_i.

Da es sich um vektorielle Größen handelt, ist eine einfache Addition nicht möglich. Jede Vektorkomponente beschreibt eine andere Richtung, hat eine andere Dimension. Es bleibt nur eine geometrisch-zeichnerische Darstellung als anschauliche Lösung übrig. Diese ist uns als Kräftedreieck geläufig.



Es stellt sich aber die Frage, wie man eine arithmetische „Summierung" über die Indizes darstellen kann. Wir formen den Vektor daher so um, dass die Richtung der Elemente nur von dem Basisvektor $\mathbf{g}_r$ bestimmt wird:

$$\mathbf{r} = x_i\, \mathbf{g}_i$$

mit $x_i = r \cos \alpha_i$ und $\mathbf{g}_i = \cos \alpha_i\, \mathbf{g}_r$

folgt $\mathbf{r} = r \cos \alpha_i \cos \alpha_i\, \mathbf{g}_r = r \cos^2\alpha_i\, \mathbf{g}_r$

Nun haben die indizierten Größen alle den gleichen Faktor $\mathbf{g}_r$, und wir erhalten eine arithmetische Vektorform, in der wir über den Index i summieren können:

$$\mathbf{r} = r\, \mathbf{g}_r \cos^2\alpha_i \qquad \text{mit} \qquad \cos^2\alpha_i = 1$$

Das Beispiel beleuchtet den Vorteil, den man mit der Einführung des Einheitsvektors als Basisvektor gewonnen hat:

Die Summenkonvention ist also nicht nur eine von Einstein erfundene abkürzende Schreibweise, sie ist vielmehr eine auch mathematisch korrekte Darstellung einer vektoriellen Größe.

In der Index-Schreibweise haben wir den Ortsvektor als Produkt zweier gleichlautend indizierter Größen dargestellt:

$$\mathbf{r} = x_i\,\mathbf{g}_i$$

Das ist eine zweifach indizierte Größe, und die müsste nach unserem Verständnis eigentlich als Teil eines zweistufigen Tensors aufgefasst werden. Dies trifft tatsächlich zu. Deutlich wird dies, wenn wir auf zwei unterschiedliche Indizes umindizieren:

$$\mathbf{r} = x_i\,\mathbf{g}_k$$

Es ist zu prüfen, ob der Ortsvektor durch diese Änderung eine wesentlich andere Bedeutung erlangt hat.
Hierzu schreiben wir den Ortsvektor ausführlich als Tensor-Matrix:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} = (&x_1\,\mathbf{g}_1 + x_2\,\mathbf{g}_1 + x_3\,\mathbf{g}_1\\ &x_1\,\mathbf{g}_2 + x_2\,\mathbf{g}_2 + x_3\,\mathbf{g}_2\\ &x_1\,\mathbf{g}_3 + x_2\,\mathbf{g}_3 + x_3\,\mathbf{g}_3\,)\end{aligned}$$

Die Summe der Hauptdiagonalglieder stellt den symmetrischen Teil des Tensors dar, die Summe der übrigen den antisymmetrischen Teil, den wir mit $\mathbf{r}^*$ bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}^{\,sym} + \mathbf{r}^*\\ &= x_1\,\mathbf{g}_1 + x_2\,\mathbf{g}_2 + x_3\,\mathbf{g}_3 = x_i\,\mathbf{g}_i \quad = \quad \mathbf{r}^{\,sym}\\ &\quad + (x_1\,\mathbf{g}_2 + x_2\,\mathbf{g}_1) \qquad = x_i\,\mathbf{g}_k \quad = \quad \mathbf{r}^*\\ &\quad + (x_2\,\mathbf{g}_3 + x_3\,\mathbf{g}_2)\\ &\quad + (x_3\,\mathbf{g}_1 + x_1\,\mathbf{g}_3)\end{aligned}$$

Nun ist mit dem symmetrischen Teil des Tensors der Vektor **r** mit

$$\mathbf{r} = x_i\,\mathbf{g}_i$$

bereits vollständig dargestellt. Daraus ergibt sich, dass der antisymmetrische Teil des Vektors verschwinden muss:

$$\mathbf{r}^* = 0$$

Das erreichen wir auch formal, indem wir einführen, dass die Änderung der Reihenfolge der Indizes Einfluss auf das Vorzeichen hat. Dies lässt sich mit einer kleinen Umrechnung darstellen:

$$x_i\,\mathbf{g}_k + x_k\,\mathbf{g}_i = 0 \quad (i \neq k)$$

Wir setzen ein: $x_i = r \cos \alpha_i$ und $\mathbf{g}_i = \mathbf{g_r} \cos \alpha_i$
$x_k = r \cos \alpha_k$ und $\mathbf{g}_k = \mathbf{g_r} \cos \alpha_k$

und beachten bei der Auswertung den nötigen Vorzeichenwechsel wegen der Änderung der Reihenfolge von ($_{ik}$) nach ($_{ki}$):

$$r \cos \alpha_i \, \mathbf{g_r} \cos \alpha_k + r \cos \alpha_k \, \mathbf{g_r} \cos \alpha_i = 0$$
$$r \cos \alpha_i \cos \alpha_k \, \mathbf{g_r} - \; r \cos \alpha_i \cos \alpha_k \, \mathbf{g_r} = 0$$

Das ist eine arithmetische Darstellung der Umformung des Vektors. Damit ist dargestellt, dass der antisymmetrische Teil des Tensors tatsächlich verschwindet.

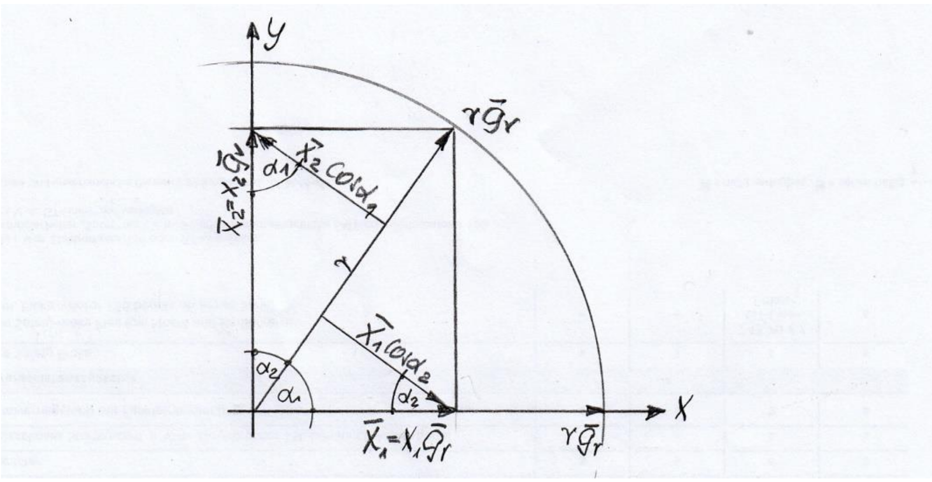
Wir sehen darin eine Erweiterung der Einstein´schen Summenkonvention: nicht nur bei gleichen, sondern auch bei alternierenden Doppelindizes kann das Summenzeichen entfallen. Ausdrücke mit zweifachen Indizes sind immer die Abkürzung der Summe aller möglichen Permutationen.

Voraussetzung ist, dass sich die Indizes auf ähnliche rechtwinklige Dreiecke beziehen, und dass bei Änderung der Reihenfolge der Indizes $_{ik}$ ein Vorzeichen-wechsel berücksichtigt wird.
Wir können daher als Ergebnis schreiben:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{g}_k \;=\; x_i \, \mathbf{g}_k \;=\; x_i \, \mathbf{g}_i$$

Das Summenzeichen, das wir weglassen können, ist offenbar schon in der Tensor-Schreibweise enthalten, weil ein Tensor als Summe seiner durch Indizes beschriebenen Glieder definiert ist.

Dieses durch arithmetische Umformungen erzielte Ergebnis soll nachfolgend auch grafisch in vektorieller Form dargestellt werden.



Wir betrachten die Form eines Vektors in der Ebene xy und untersuchen nur den antimetrischen Teil r*:

$$\mathbf{r}^* = x_1\,\mathbf{g}_2 + x_2\,\mathbf{g}_1 = 0$$

Wir formen die Komponenten g_i des Basisvektors auf den Basisvektor g_r um. Dabei beachten wir, dass der Basisvektor g_r jede beliebige Richtung im Einheitskreis haben kann, z.B. auch die der jeweils zugeordneten Vektorachse. Damit erhält man mit

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_r \cos\alpha_i \qquad \text{und}$$
$$x_i\,\mathbf{g}_r = \mathbf{x}_i$$

$$\begin{aligned} r^* &= x_1\,(\mathbf{g}_r \cos\alpha_2) + x_2\,(\mathbf{g}_r \cos\alpha_1) \\ &= (x_1\,\mathbf{g}_r)\cos\alpha_2 + (x_2\,\mathbf{g}_r)\cos\alpha_1 \\ &= \mathbf{x}_1 \cos\alpha_2 + \mathbf{x}_2 \cos\alpha_1 = 0 \end{aligned}$$

Wir können die beiden Vektorkomponenten $\mathbf{x}_i$ unter Verwendung von $\cos\alpha_k$ auf die Diagonalen projizieren, die senkrecht sind zur Vektorrichtung **r**. Dabei werden die Richtungspfeile mitprojiziert, und wir erhalten zwei gleiche Vektoren von entgegengesetzter Richtung, die sich gegeneinander aufheben. Das ist der geometrische Beweis unserer Behauptung.

Wir können auch unsere Vorzeichenregel bei Änderung der Reihenfolge des Indizes anwenden und erhalten dann auch das in dem Bild dargestellte Ergebnis:

$$r^* = \mathbf{x}_1 \cos\alpha_2 + \mathbf{x}_2 \cos\alpha_1 = \mathbf{x}_1 \cos\alpha_2 - \mathbf{x}_1 \cos\alpha_2 = 0$$

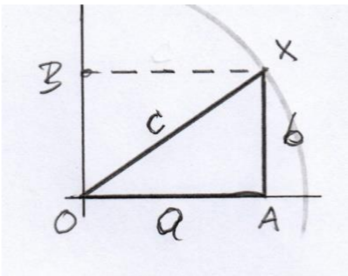
Wir haben die Beziehung $\mathbf{x}_i = x_i\,\mathbf{g}_r$ verwendet, die nicht in einem gemeinsamen rechtwinkligen und ähnlichen Dreieck hergeleitet werden kann. Den Fall haben wir schon bei der Abgrenzung des neuen Basisvektors zu den Basisvektoren e_i untersucht mit dem Ergebnis, dass bei der Summation derartiger Ausdrücke auf die geometrischen Zusammenhänge geachtet werden muss, wenn man allgemeine Indizes verwendet.
Das ist hier geschehen, indem die Indizes ausgeschrieben wurden und die Darstellung grafisch begründet wurde.

Damit haben wir auch auf zeichnerischem Weg gezeigt, dass die Änderung der Reihenfolge von Faktoren oder Indizes mit einer Vorzeichenänderung verbunden ist.

16. Der Satz des Pythagoras als Grundlage der Vektorrechnung

Der Satz des Pythagoras ist ein fundamentaler Satz der euklidischen Geometrie, wir wollen ihn abkürzend den „Pythagoras“ nennen. Er beschreibt die Längenverhältnisse der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks zueinander oder der Kanten eines Quaders zu seiner räumlichen Diagonalen. Bei unseren Untersuchungen beschränken wir uns der Anschaulichkeit halber auf die Darstellung in der Ebene xy.

Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck im kartesischen Koordinatensystem. Der radiale Abstand OX wird durch die Hypotenuse c, die Abstände auf den kartesischen Achsen OA und OB werden durch die Katheten a und b dargestellt.



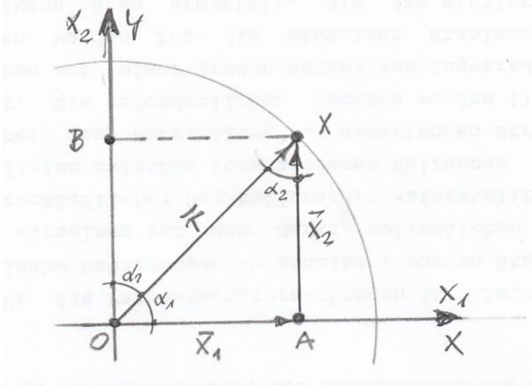
Die klassische Form des Pythagoras lautet dann:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Diese Gleichung wollen wir mit Hilfe der Winkelfunktionen der Winkel α_i und der kartesischen Koordinaten darstellen.

Vektorielle Darstellung
Wir fassen die Seiten des Dreiecks als gerichtete Abstände auf, was wir durch Richtungspfeile andeuten. Damit beschreiben wir zwei Eigenschaften: Abstand eines Ortes vom Ursprung und Richtung dieses Ortes. Das sind die Eigenschaften von Vektoren, und als solche wollen wir sie nun auch behandeln. Die Orte werden durch schwarze Punkte gekennzeichnet. Die vektorielle Darstellung in Indexschreibweise lautet dann:

$$\mathbf{r} = x_i \, \mathbf{g}_i$$



Das ist eine Summe über (i) von Achsvektoren entsprechend unserer Summationsvereinbarung. Wir formen um:

$$\mathbf{r} = r\,\frac{x_i}{r}\cos\alpha_i\,\mathbf{g}_r$$
$$r\,\mathbf{g}_r = r\cos\alpha_i\cos\alpha_i\,\mathbf{g}_r$$

In diesem Ausdruck ist	$r\,\mathbf{g}_r$	Abstand mal Richtung des Ortes X
und	$r\cos\alpha_i$	Abstand des Ortes A bzw. B
und	$\cos\alpha_i\,\mathbf{g}_r$	Richtung des Ortes A bzw. B

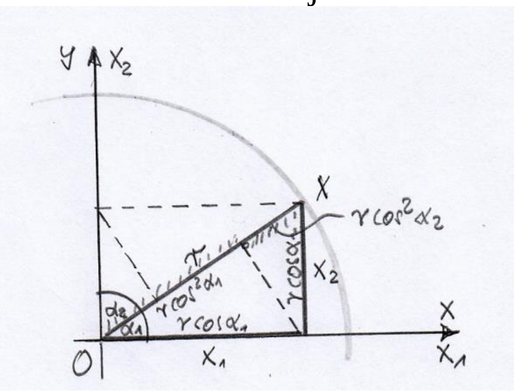
Wir kürzen die Gleichung durch den gemeinsamen Faktor r $\mathbf{g}_r$ und erhalten eine dimensionslose Form des Pythagoras mit

$$\cos^2\alpha_i = 1$$

Wir haben damit den Ortsvektor **r** als Resultierende der Achsvektoren $\mathbf{x}_i$ dargestellt mit Hilfe kovarianter Vektoranteile. Während der Betrag des Ortsvektors **r** konstant ist, bleibt die Richtung des Ortsvektors unbestimmt. Diese wird durch einen Satz von Richtungswinkeln α_i festgelegt, die den Pythagoras erfüllen und dadurch ein orthogonales System bilden.

Arithmetische Darstellung

In einem zweiten Schritt wollen wir die Beziehung zwischen den Dreieckseiten unter Verwendung einer kontravarianten Projektion darstellen.



Die dargestellten Strecken sollen keine Richtung haben und erhalten daher auch keine Richtungspfeile. Die Strecke r ergibt dann projiziert auf die Koordinatenachsen x_i:

$$x_1 = r\cos\alpha_1 \quad \text{und} \qquad x_2 = r\cos\alpha_2$$

Wir projizieren zurück auf die Achse OX:

$$r = x_1\cos\alpha^1 + x_2\cos\alpha^2$$
$$= r\cos\alpha_1\cos\alpha^1 + r\cos\alpha_2\cos\alpha^2 \quad = r\,\frac{x_i}{r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = r$$

Die Umrechnung führt auf die Linearform der Vektorrechnung:

$$r = x_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \qquad \text{und} \qquad \frac{x_i}{r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = 1$$

Wir interpretieren das Ergebnis als die arithmetische Form des Pythagoras. Das wird deutlicher, wenn wir etwas umformen:

$$\cos\alpha_i \cos\alpha^i = \frac{x_i}{r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = 1$$

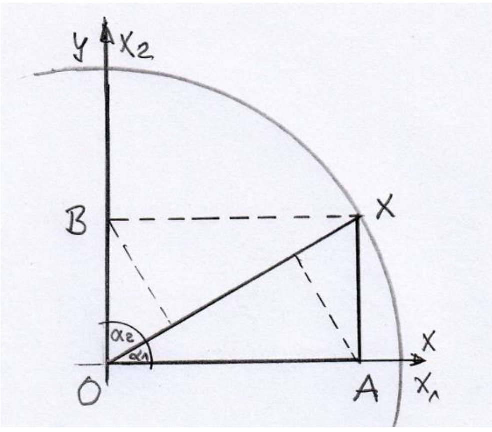
Die Verwendung gerichteter, vektorieller Größen ist in dieser Darstellung nicht erforderlich, weil nur gleichgerichtete Elemente addiert werden.

Funktionaler Zusammenhang von Abstand und Richtung

In einem weiteren Schritt wollen wir die Lage des Ortes X als Funktion des Abstandes vom Ursprung und einer Richtung darstellen. Offenbar gibt es zwei Wege von O nach X:

1.Weg: gerade Strecke: (OX) = r $\qquad r_{(r)} = r\, f_{(r)} = r$

2. Weg: gebrochene Strecke: (OA+AX)= r $\qquad r_{(\alpha_i)} = r \cos\alpha_1\, f_{(\alpha_1)} + r \cos\alpha_2\, f_{(\alpha_2)}$
$\qquad = r \cos\alpha_i\, f_{(\alpha_i)} = r$



Die Wege fassen wir als gerichtete Strecken auf.

$\mathbf{f}_{(r)}$ und $\mathbf{f}_{(\alpha_i)}$ sind Funktionen, mit denen wir die Bedingungen des Pythagoras erfüllen wollen. Die beiden Funktionen sollen Richtungseigenschaften besitzen. Das wollen wir durch Fettdruck (oder einen Überstrich) andeuten. Ferner sollen die Funktionen nur durch die Koordinaten des Ursprungs und des Ortes A oder X festgelegt sein. Dann ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\mathbf{r}_{(r)} = r\, \mathbf{f}_{(r)} \qquad (r=0,\ r=r)$$
$$\mathbf{r}_{(\alpha_i)} = r \cos\alpha_i\, \mathbf{f}_{(\alpha_i)}$$

Beide Gleichungen sind nur am Anfang und am Ende des jeweiligen Teilvektors erfüllt. Wir definieren für die beiden Funktionen einen Zusammenhang mit dem Basisvektor und seine Komponenten

$$\mathbf{f}_{(r)} = \mathbf{g}_r \qquad \text{und} \qquad \mathbf{f}_{(\alpha_i)} = \mathbf{g}_i$$

und berücksichtigen für den Basisvektor und seine Komponenten:

$$\mathbf{g}_r = \cos\alpha^i\, \mathbf{g}_i$$

und $\mathbf{g}_i = \cos\alpha_i \, \mathbf{g}_r$

und erhalten zwei Ergebnisse für die Vektorgleichung eines Ortsektors:

$$r \, \mathbf{g}_r = (r \cos\alpha_i) \, \mathbf{g}_i = r \, (\cos\alpha^i \, \mathbf{g}_i)$$

Es ergeben sich die vektorielle oder die arithmetische Form abhängig davon, wie wir die Faktoren durch Klammern zusammenfassen:

$$\mathbf{r} = x_i \, \mathbf{g}_i \quad = r \, \mathbf{g_r}$$

und hieraus den Einheitsvektor $\mathbf{r_o}$ in seinen beiden Formen:

$$\mathbf{r_0} = \cos\alpha_i \cos\alpha_i \, \mathbf{g}_r = \cos^2 \alpha_i \, \mathbf{g}_r = \mathbf{1}$$
$$\mathbf{r_0} = \cos\alpha_i \cos\alpha^i \, \mathbf{g}_r = \mathbf{1}$$

Wir interpretieren die Ergebnisse als die **vektorielle und arithmetische Form** des Pythagoras.

Als Ergebnis können wir ferner feststellen, dass die vektorielle (kovariante) Form und die arithmetische (kontravariante) Form des Pythagoras identisch sind:

$$\boldsymbol{\cos\alpha_i \cos\alpha_i = \cos\alpha_i \cos\alpha^i = 1}$$

Wir haben damit die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks auf einen Basisvektor und seine Komponenten zurückgeführt. Sie erlauben uns den Abstand r von O nach X auf zwei verschiedenen Wegen darzustellen:

Der **1. Weg**, die gerade Strecke (OX), ist das, was wir von einem Abstand r erwarten und ist gleichzeitig ein Vektor **r** von (O) nach (X). Das ist der Vektor in kontravarianter oder arithmetischer Darstellung:

$$\mathbf{r} = r \cos\alpha_i \cos\alpha^i \, \mathbf{g_r} = r \, \mathbf{g}_r$$

Der **2. Weg**, die gebrochene Strecke (OA + AX), ist offenbar eine zweite Form des Vektors **r,** die aus Elementen des Vektors unterschiedlicher Längen und Richtungen besteht.

$$\mathbf{r} = (r \cos\alpha_i)\mathbf{g}_i$$

Dies ist die kovariante oder vektorielle Darstellung des Vektors, die durch die Projektion von r auf die Achsen $\mathbf{g}_i$ entsteht. Dies ist der 2. Weg, was durch die Klammern sowie durch die Wahl des Index angedeutet werden soll.

Die Ursache dafür, dass der Ort (X) sowohl durch den Vektor (**OX**) als auch durch den gebrochenen Vektor (**OA+AX**) beschrieben werden kann, liegt darin, dass wir für einen Vektor nur zwei Orte (O und X) vorgegeben müssen, die wir durch beliebige Wege verbinden können, sie müssen nur den Pythagoras erfüllen. Wir haben zwei Richtungsfunktionen gewählt, den Basisvektor bzw. seine Komponenten:

$$\mathbf{g}_r = \cos\alpha^i \, \mathbf{g}_i$$

Damit ergibt sich ein Vektor als das Produkt von Abstand und Richtung in der Form:

$$r \, (\cos\alpha^i \, \mathbf{g}_i \,) = r \, \mathbf{g}_r = (r \cos\alpha_i)\mathbf{g}_i = x_i \, \mathbf{g}_i$$

Die Summanden sind die Projektionen der Komponenten auf den Vektor - oder des Vektors auf die Koordinatenachsen. Die Gleichung beschreibt zwei unterschiedliche Verläufe des Vektor-Weges von (O) nach (X).

Das bedeutet, dass die Form eines Vektors nicht nur durch seinen Abstand r, sondern auch durch die gerichteten Vektorstrecken r $\cos\alpha_i$ bestimmt werden kann. Beide Wege, sowohl (**r**) als auch (**r** $\cos\alpha_i$), sind nur durch ihre jeweiligen Anfangs- und Zielorte definiert.

Wenn die Teilbeträge des Vektors gleichgerichtet sind, fällt die unterschiedliche Herkunft der Teilbeträge nicht weiter auf. Sind aber die Teilbeträge eines Vektors von verschiedener Richtung, so ist auch ihr Anteil an der resultierenden Richtung verschieden, weil nur die Projektion auf die Vektorachse (nach den Regeln des Pythagoras) auf den Abstand anzurechnen ist.

Diese Deutung ist bemerkenswert, weil sich hier eine Dualität des Vektorweges ergibt. Vektoren sind definiert durch den Abstand zweier Orte sowie durch die sie verbindende Richtung. Die Form des Weges zwischen den beiden Orten ist nicht festgelegt. Sie kann beispielsweise durch Funktionen wie $\mathbf{f}_{(\mathbf{r})}$ oder $\mathbf{f}(\alpha_i)$ definiert werden. Wir werden im Zusammenhang mit der Multiplikation und der Ableitung von Vektoren darauf zurückkommen.

17. Die Winkeldifferenz

Für Sinus und Kosinus der Differenz zweier Winkel gelten in der Ebene die trigonometrischen Additionstheoreme:

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$ und

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

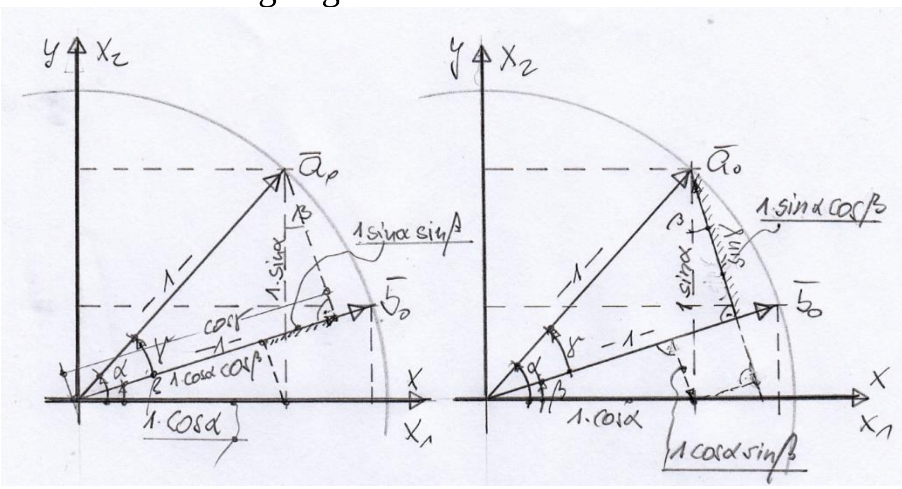
Die Gleichungen können hergeleitet werden mit Hilfe der Eulerschen Formeln

$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$

und $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin \alpha$

Sie gelten dann auch für den räumlichen Fall, weil die Ebene des resultierenden Winkels in jede Ebene transformiert werden kann.

Man kann die Gleichungen geometrisch aus den beiden Bildern herleiten.



Insbesondere die Vorzeichen der projizierten Strecken werden anschaulich, wenn man diese als Vektoren auffasst, die bei der Projektion ihre Richtung weitergeben, indem sie bei der mit der Projektion verbundenen Drehung ihren Richtungspfeil mitnehmen.

Der Einfluss einer Winkeldifferenz zwischen zwei Vektoren wollen wir nun mit Hilfe der Richtungswinkel α_i und β_k und der zugehörigen Einheitsvektoren darstellen. Wir führen in den Gleichungen die Richtungswinkel α_i und β_i und die Winkeldifferenz γ ein und stellen jeweils einheitlich auf $\sin\alpha_i$ oder $\cos\alpha_i$ um:

$\alpha_1 = \alpha$	$\beta_1 = \beta$	$\sin\alpha = \cos\alpha_2$	$(\alpha - \beta) = \gamma$
$\alpha_2 = 90° - \alpha$	$\beta_2 = 90° - \beta$	$\sin\beta = \cos\beta_2$	

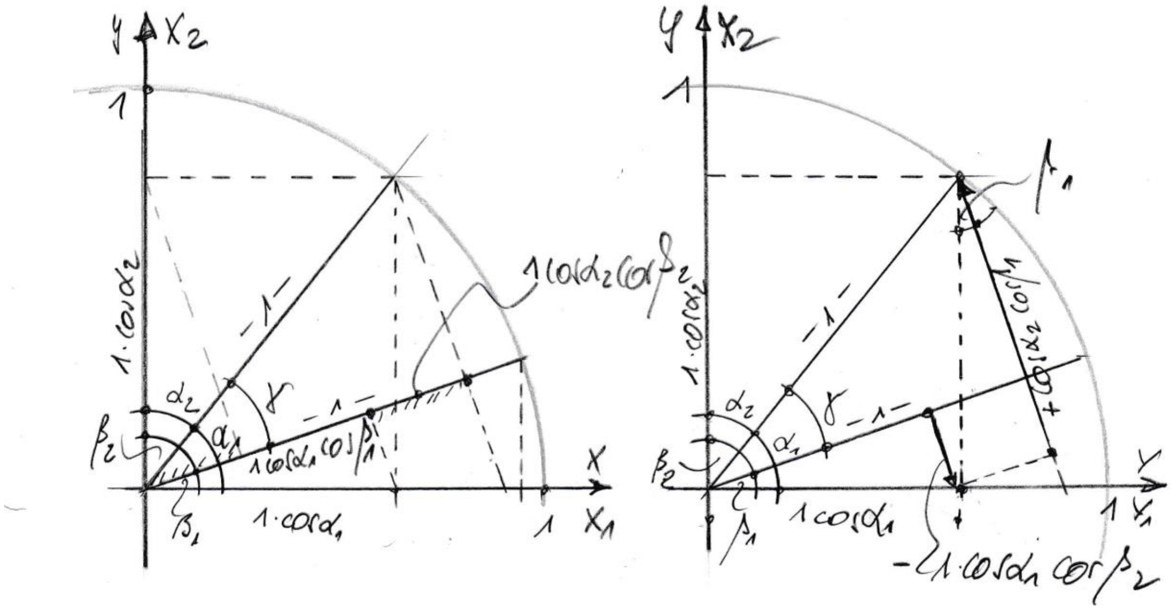
Die geänderten Winkelbezeichnungen erlauben es die nachfolgenden Gleichungen für die trigonometrischen Beziehungen in Indexschreibweise aufzuschreiben:

$$\cos\gamma = \cos\alpha_1 \cos\beta^1 + \cos\alpha_2 \cos\beta^2 \quad = \quad \sin\alpha_2 \sin\beta^2 + \sin\alpha_1 \sin\beta^1$$
$$\sin\gamma = \sin\alpha_1 \sin\beta^2 - \sin\alpha_2 \sin\beta^1 \quad = \quad \cos\alpha_2 \cos\beta^1 - \cos\alpha_1 \cos\beta^2$$

Verwendet man allgemeine Indizes i und k, so erhält man für (i,k) = 2:

$$\cos\gamma = \cos\alpha_i \cos\beta^i = \sin\alpha_i \sin\beta^i \qquad i = k$$
$$\sin\gamma = \sin\alpha_i \sin\beta^k = \cos\alpha_k \cos\beta^i = -\cos\alpha_i \cos\beta^k \qquad i \neq k$$

Dabei haben wir beachtet, dass die mit β gebildeten Funktionen sin und cos kontravariante Projektionen sind, und der Index steht oben. Ferner findet ein Vorzeichenwechsel beim Übergang von ($_{ki}$) nach ($_{ik}$) bei sinγ statt. (Vgl. hierzu die Ausführungen im Abschnitt „16. Kronecker-Delta“).
Die allgemein indizierten Gleichungen gelten auch für n = 3.



Für die Vorzeichen gilt, dass der Winkel γ entgegen dem Uhrzeigersinn als positiv gezählt werden soll. Die Richtungen der Vektorkomponenten werden durch die verwendeten Basisvektoren und ihre Komponenten festgelegt.

Grafisch ergeben sich die Vorzeichen durch die Projektion des Vektors als Drehung um den Projektionswinkel unter Mitnahme des Vektorpfeils. Das kann in der obigen Darstellung leicht nachvollzogen werden.

Arithmetisch ergeben sich die Vorzeichen durch die Multiplikation der komplexen Zahlen und der trigonometrischen Vorzeichenregeln am Einheitskreis.

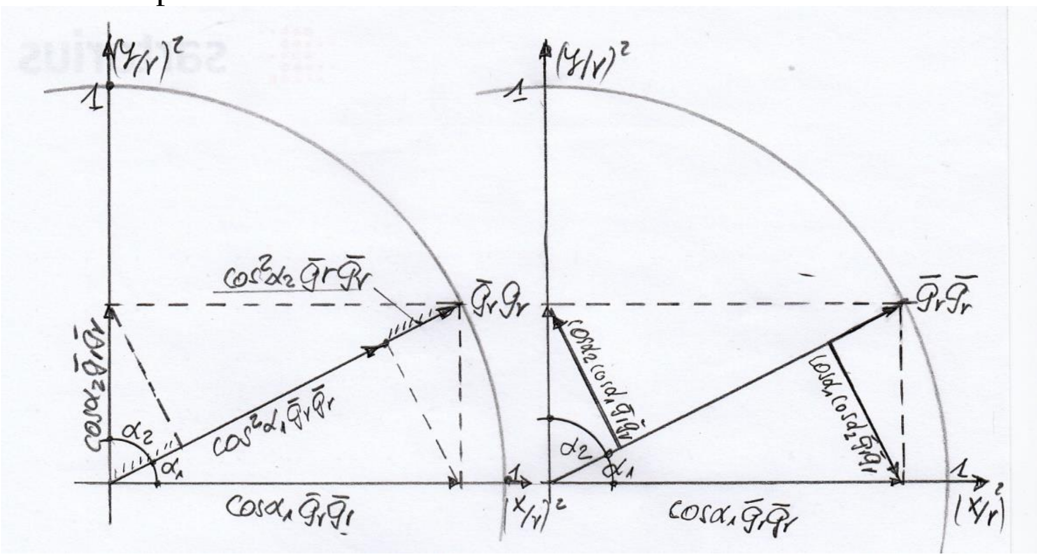
Für den allgemeinen räumlichen Fall gilt, dass die Summe der Winkel α_i nicht 180° beträgt und deshalb keine Winkel α und β angegeben werden können. Vielmehr müssen die $\cos\alpha_i$ den Satz des räumlichen Pythagoras erfüllen. Der Winkel γ liegt dann in der Ebene der beiden räumlichen Richtungen $\mathbf{a}_o$ und $\mathbf{b}_o$.

18. Kronecker-Delta

Wir untersuchen das Produkt zweier Basisvektoren $\mathbf{a}_o(\alpha_i)$ und $\mathbf{a}_o(\alpha_k)$

	$\mathbf{g}_r = \cos\alpha^i\, \mathbf{g}_i$	bzw.	$\mathbf{g}_i = \cos\alpha_i\, \mathbf{g}_r$
und	$\mathbf{g}_r = \cos\alpha^k\, \mathbf{g}_k$	bzw.	$\mathbf{g}_k = \cos\alpha_k\, \mathbf{g}_r$

Das sind nur scheinbar unterschiedliche Basisvektoren, da die Winkel α_i und α_k den gleichen Winkel α beschreiben. Die Umindizierung ist aus formalen Gründen erforderlich, weil bei einer Multiplikation sonst mehr als zwei gleiche Indizes zusammen auftreten würden. Das Produkt der beiden Basisvektoren stellt somit eine Multiplikation mit sich selbst dar.



$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{ii}} = \cos\alpha_i \cos\alpha^i$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{\delta}^*_{\mathbf{ik}} = -\cos\alpha_i \cos\alpha^k$

Das Produkt

$$\mathbf{a}_o\, \mathbf{a}_o = \quad \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r \;=\; \cos\alpha_i \cos\alpha^k\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k$$

nennen wir „Vektorielles Produkt“. Es gelten die Regeln der Algebra. Skalar- und Vektorprodukt sind nicht erklärt. Aus der bildlichen Darstellung ergibt sich, dass der zweite Faktor kontravariant dargestellt werden muss.

Das Produkt der beiden Winkelfunktionen nennen wir Kronecker-Delta, symbolisch δ_i^k , mit

$$\mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r = \delta_i^k\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k$$

Da δ_i^k auf der rechten Seite der Gleichung Teil einer Summation ist, kann δ_i^k nicht als Skalar herausgelöst werden. Das gelingt erst, wenn wir von der vektoriellen Darstellung zur arithmetischen übergehen:

$$\mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r \;=\; \delta_i^k\; \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k$$

Wir ersetzen $\mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k$

$$\mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r \;=\; \delta_i^k \cos\alpha_i \cos\alpha^k\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r$$

$$\mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r \;=\; (\delta_i^k)^2\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r$$

Nun können wir Kronecker-Delta herauslösen und erhalten in basisfreier Darstellung:

$$1 = (\delta_i{}^k)^2$$

$\delta_i{}^k$ ist ein zweifach indizierter Ausdruck und deshalb eine Komponente des zweistufigen Tensors $\mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r$ **.**
δ_{ik} ist ferner ein Transformationskoeffizient: er transformiert einen Tensor oder einen Vektor in seine Komponenten und umgekehrt.

Die bekannten Transformationen von Vektoren und Tensoren durch Austausch von Summationsindizes erhalten hier ihre Begründung, und es lassen sich folgende Identitätsketten anschreiben (hier kovariant, oder sonst kontravariant):

$$\mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r = \delta_{ik}\; \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k = \cos\alpha_i \cos\alpha_k\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k = \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r \quad \text{oder:}$$
$$\mathbf{g}_k = \delta_{ik}\; \mathbf{g}_i = \cos\alpha_i \cos\alpha_k\, \mathbf{g}_i = \mathbf{g}_r \cos\alpha_k = \mathbf{g}_k$$

Dabei haben wir außer dem Pythagoras die Beziehungen zwischen dem Basisvektor und seinen Komponenten berücksichtigt:

$$\mathbf{g}_r = \cos\alpha^i\, \mathbf{g}_i$$
und $$\mathbf{g}_i = \cos\alpha_i\, \mathbf{g}_r$$

Es wird deutlich, dass die Anwendung des Pythagoras in einem rechtwinkligen Dreieck Voraussetzung für die Transformationen ist.

Das Produkt der beiden Basisvektoren ergab:

$$\mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r = \delta_{ik}{}^2\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r$$

Wir wollen die basisfreie Form von Kronecker-Delta in kovarianter Form näher untersuchen. Diese lautet ausgeschrieben:

$$1^2 = \delta_{ik}{}^2$$
$$\begin{aligned} 1^2 = (&\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} \\ &+ \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} \\ &+ \delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33})^2 \end{aligned}$$

Wir zerlegen die Tensor-Matrix in zwei Teile, symmetrisch und antisymmetrisch, und erhalten in Index-Schreibweise

$$1^2 = (\delta_{ii} + \delta^*{}_{ik})^2 \qquad (ii = kk),\ (ik \neq ki)$$

Die $\delta^*{}_{ik}$ sind die Summe der antisymmetrischen Elemente der Tensor-Matrix. Wir wollen sie durch den * von der vollständigen Summe δ_{ik} der Elemente abheben. Die Vorzeichen lassen sich anhand der Projektionsrichtungen überprüfen.

i = k

Der Transformationskoeffizient besteht nur aus den Gliedern der Hauptdiagonalen, wir erhalten

$$\delta_{ii} = (\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}) = 1$$

mit $\delta_{ii} = (\cos\alpha_1 \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 \cos\alpha_3)$
und $\delta_{ii} = (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3) = \cos^2\alpha_i$

ergibt sich der Pythagoras: $\cos^2\alpha_i = 1$

Dieser Zusammenhang gilt für den ebenen und den räumlichen Fall.

i ≠ k, i = k

Die Summe der Hauptdiagonalglieder erfüllt bereits die Ausgangsgleichung. Wir fügen das Ergebnis in die Gleichung ein. Die Summe der Glieder des antisymmetrischen Tensors muss daher Null sein, also folgt für den ebenen Fall:

$$(1+\delta^*_{ik})^2 = 1^2$$
$$(1+(\delta_{12} + \delta_{21}))^2 = 1^2$$
$$(1 + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_2 \cos\alpha_1)^2 = 1^2$$

Die Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn in der Klammer die Summe der beiden Produkte der Winkelfunktionen Null ist. Wir schließen daraus, dass die Reihenfolge der Indizes Einfluss auf das Vorzeichen hat und definieren:

$$\delta^*_{ik} + \delta^*_{ki} = 0 \qquad \text{also:} \qquad \delta^*_{ik} = - \delta^*_{ki}$$

Kronecker-Delta kann also als die Summe aus einem symmetrischen und einem antisymmetrischen Tensor dargestellt werden:

$$\delta_{ii} = 1$$
$$\delta^*_{ik} = \delta_{12} + \delta_{21} = 0$$

Für Kronecker-Delta ergibt sich damit für den Fall, dass die beiden Winkel α_0 gleich sind

$$\delta_{ik} = 1$$

Im ebenen Fall ergibt sich ausgeschrieben

$$\delta_{12} = - \cos\alpha_i \cos\alpha_k = - \cos\alpha_i \cos(90° - \alpha_i)$$
$$\delta_{12} = - \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha_1 = - \delta_{21}$$

Die Vorstellung vom Wechsel des Vorzeichens (ik) nach (ki) wird auch in der bildlichen Darstellung bestätigt. Der Ausdruck

$$(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_2 \cos\alpha_1) = 0$$

stellt sich in dem rechten Bild als die Summe zweier Tensorkomponenten von entgegengesetzten Richtungen senkrecht zur Vektorrichtung dar, die sich vektoriell aufheben.

Schreiben wir diese Ausdrücke aus mit ihren arithmetischen Vorzeichen, so erhalten wir das schon bekannte Ergebnis für Kosinus und Sinus der Winkeldifferenz:

$$(\cos\alpha_1 \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 \cos\alpha_2) = \cos^2\alpha_i = \cos\gamma = 1$$
$$(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 \cos\alpha_2) = \sin\gamma = 0$$

Die Winkeldifferenz γ der beiden hier untersuchten Basisvektoren gleicher Richtung ist tatsächlich Null (wegen β=0).

(i≠k) im räumlichen Fall:

Es ist zu prüfen, ob das Ergebnis des ebenen Falles auch für den räumlichen Fall gilt. Für den antisymmetrischen räumlichen Tensor gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k &= \delta^*_{ik}\ \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r \\ &= (\delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{13} + \delta_{31} + \delta_{23} + \delta_{32})\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r \\ &= (\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 \\ &\quad + \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + \cos\alpha_3 \cos\alpha_2 \\ &\quad + \cos\alpha_3 \cos\alpha_1 + \cos\alpha_1 \cos\alpha_3)\ \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r \end{aligned}$$

Tatsächlich gelingt es durch Vertauschung von Indizes und entsprechender Änderung der Vorzeichen die Bedingung $\delta^*_{ik} + \delta^*_{ki} = 0$ für alle drei Kombinationen zu erzeugen.

Der Klammerausdruck wird zu Null, und auch im räumlichen Fall gilt für Kronecker-Delta:

$$\begin{aligned} \delta_{ik} &= \delta_{ki} = 1 && (i = k) \\ \delta^*_{ik} + \delta^*_{ki} &= 0 && (i \neq k) \\ \delta_{12} &= -\delta_{21} \\ \delta_{23} &= -\delta_{32} \\ \delta_{31} &= -\delta_{13} \end{aligned}$$

Die Änderung der Reihenfolge der Indizes hat also Einfluss auf das Vorzeichen von δ_{ik}. Dies ist für die Vektorrechnung nicht neu. Der Beweis unter Verwendung des neuen Basisvektors eröffnet jedoch einen neuen Blick auf den Zusammenhang.

Ohne Begründung haben wir bei der Definition von δ_{ik} das Summenzeichen weggelassen:

$$\delta_{ik} \;=\; \cos\alpha_i \cos\alpha_k$$

Die Auswertung hat gezeigt, dass wir nebenbei die Zulässigkeit der Einstein´schen Summenkonvention nachgewiesen haben. Der Wert der Summe der Glieder in der Hauptdiagonalen beträgt

$$\delta_{ii} \;=\; \cos^2\alpha_i \;=\; 1$$

gleichzeitig auch $\delta_{ik} = \delta_{ii} + \delta^*_{ik} = 1 \qquad (i \neq k)$

und entspricht damit in unserem orthogonalen System dem Pythagoras und dem erwarteten Betrag des gesamten Tensors.
Das ist nur zu erfüllen, wenn

$$\delta^*_{ik} \;=\; 0 \qquad \text{für} \quad i \neq k$$

mit dem Ergebnis $\delta^*_{ik} \;=\; -\,\delta^*_{ki}$

Wir stellen fest, dass die Summenkonvention nach Einstein erweitert werden kann:

> In einem orthogonalen System kann auf Summenzeichen verzichtet werden, wenn über doppelt auftretende Indizes summiert werden soll. Dies gilt auch für Ausdrücke mit alternierenden Indizes, wenn hier ein Vorzeichenwechsel beim Wechsel von $_{ik}$ nach $_{ki}$ und umgekehrt berücksichtigt wird.

19. Tensor-Schreibweise des Ortsvektors

Die Standardschreibweise eines Ortsvektors haben wir als doppelt indizierte Größe eingeführt:

$$\mathbf{r} = x_i\, \mathbf{g}_i$$

Wir haben aber verabredet zweifach indizierte gerichtete Größen als Tensoren 2. Stufe zu betrachten. Aus dieser Sicht müsste die Grundform eines Ortsvektors eigentlich lauten:

$$\mathbf{r} = x_i\, \mathbf{g}_k$$

Ein Ortsvektor ergibt sich damit als die Summe aller Elemente einer Tensor-Matrix. Es ist zu prüfen, welchen Einfluss diese Schreibweise auf den Wert des Ortsvektors hat.

Wir formen die Tensor-Schreibweise mit unseren Mitteln um

$$\mathbf{r} = x_i\, \mathbf{g}_k = r\, x_i/r\, \cos\alpha_k\, \mathbf{g}_r$$
$$\mathbf{r} = \cos\alpha_i\, \cos\alpha_k\, r\, \mathbf{g}_r$$

und erhalten die Form der Kosinus-Funktionen, die wir als Kosinus-Delta kennen gelernt haben:

$$\delta_{ik} = \cos\alpha_i\, \cos\alpha_k = 1$$

Wir sehen, dass δ_{ik} eine Transformationsmatrix ist,
welche die vektorielle Form des Vektors in die arithmetische Form transformiert und gleichzeitig
die gleichindizierte Form in den zweistufigen Tensor überführt:

$$\mathbf{r} = \delta_{ik}\, x_i\, \mathbf{g}_k = x_i\, \mathbf{g}_i = r\, \mathbf{g}_r$$

Die Änderung der Schreibweise hat also keinen Einfluss auf den Wert des Vektors. Damit ist bewiesen, dass es berechtigt ist, einen Vektor als einen ursprünglich zweistufigen Tensor zu betrachten, der die Abhängigkeit sowohl vom Abstand als auch von der Richtung beschreibt.

Diese Umformungen wollen wir auch grafisch für einen Vektor in der Ebene xy darstellen. Das bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, da durch eine Transformation jeder Vektor in einer geeigneten Ebene dargestellt werden kann. Zur Beschreibung eines rechtwinkligen Dreiecks genügt außer dem rechten Winkel ein weiterer Winkel, den wir mit α bezeichnen. Dann gilt:

$\alpha_1 = \alpha$, $\quad \alpha_2 = (90° - \alpha)$ und
$\cos\alpha_1 = \cos\alpha$, $\quad \cos\alpha_2 = \sin\alpha$

Wir gehen aus von Kronecker-Delta geschrieben als Tensor-Matrix:

$$\begin{aligned}
\delta_{ik} = \cos\alpha_i \cos\alpha_k = 1 \quad &= \quad \cos\alpha_1 \cos\alpha_1 + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \\
&\quad + \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 \cos\alpha_2 \\
&= (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2) + (\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_2 \cos\alpha_1) \\
&= \qquad 1 \quad + \ (\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 \cos\alpha_2) \qquad = 1
\end{aligned}$$

Dabei wurde von der erweiterten Einstein´schen Summationsregel Gebrauch gemacht.
Wir stellen um auf den Winkel α, und wir erhalten eine Gleichung in α mit sin α und cos α als zu permutierende Terme und beachten den Vorzeichenwechsel bei sin α wegen Änderung der Reihenfolge:

$$\begin{aligned}
\delta_{ik} = \cos\alpha \sin\alpha \quad &= \quad \cos\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha \\
&\quad + \sin\alpha \cos\alpha + \sin\alpha \sin\alpha \\
&= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos\alpha \sin\alpha - \cos\alpha \sin\alpha) \qquad = 1
\end{aligned}$$

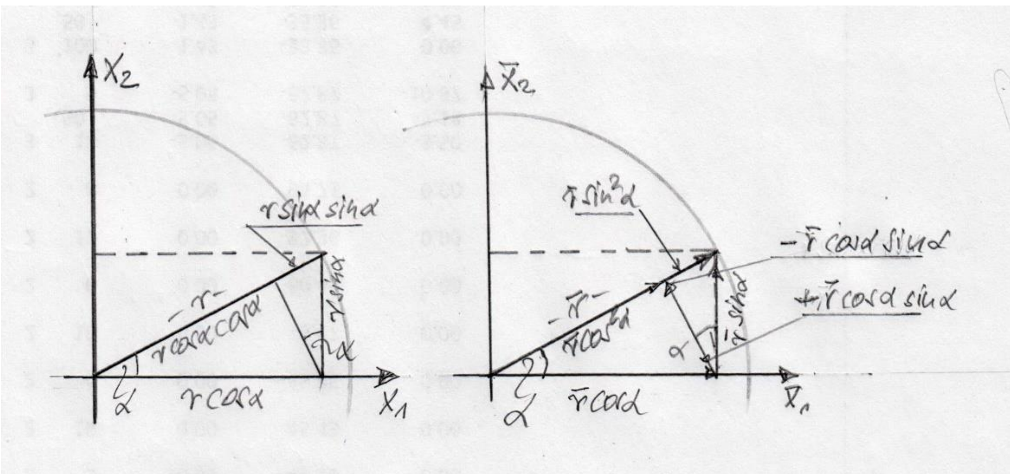
Dann gilt für den Ortsvektor:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} = x_i\, \mathbf{g_k} &= r \cos\alpha_i \cos\alpha_k\, \mathbf{g}_r \\
&= r\,(\cos^2\alpha_i + \cos\alpha_i \cos\alpha_k)\, \mathbf{g}_r \quad (i \neq k) \\
&= r\,((\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos\alpha \sin\alpha + \sin\alpha \cos\alpha))\, \mathbf{g}_r \\
&= (\, r + (\cos\alpha \sin\alpha - \cos\alpha \sin\alpha))\, \mathbf{g}_r = r\, \mathbf{g}_r
\end{aligned}$$

Einmal mehr bemerken wir die Vereinfachungen durch die indizierte Darstellung.

Wir stellen nun den Ortsvektor in zwei verschiedenen Bildern dar:

als Darstellung der Abstände des rechtwinkligen Dreiecks im Einheitskreis mit ungerichteten Größen, d.h. ohne Richtungspfeil, und
als Darstellung von Vektoren mit Richtungspfeil.



Die angegebenen Längen der Stücke des rechtwinkligen Dreiecks ergeben sich als Projektionen, die ausgehend vom Abstand r bzw. dem Vektor **r** auf die jeweils gegenüber liegenden Dreieckseiten ausgeführt werden und anschließend in gleicher Weise wieder zurück projiziert werden.

Wir haben nun alle Glieder des Vektor-Tensors an den rechtwinkligen Dreiecken dargestellt und können die Additionsvorschriften des Tensors ausführen. Dabei ergibt sich für

Bild 1: gleichgerichtete Dreieckstücke:
Wir erkennen betragsmäßig die Tensor-Glieder der Haupt- und Nebendiagonalen. Sie haben zunächst aber kein Vorzeichen. Diese finden wir mit der Vorstellung, dass Projektionen mit einer Drehung um den Winkel γ verbunden sind. Wir zählen den Winkel γ entgegen dem Uhrzeigersinn positiv. Die Winkelfunktionen haben dadurch Vorzeichen, die wir bei der Auswertung berücksichtigen.

Für den Abstand r erhalten wir auf diese Weise:

$$r \cos(-\alpha) \cos\alpha + r \sin\alpha \sin\alpha = r$$
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Für die Summe der beiden Glieder der Nebendiagonalen ergibt sich:

$$\cos(\alpha) \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 0$$
$$- \cos\alpha \sin\alpha + \sin\alpha \cos\alpha = 0$$

Bild rechts: Dreieckstücke als Vektoren:
Bei der Projektion der gerichteten Strecken wird der Richtungspfeil mitgedreht. Es ergeben sich seileckähnliche Strukturen, die uns als Kräftedreiecke geläufig sind, und die uns eine vektorielle Addition der einzelnen Stücke erlauben. Die Vorzeichen werden durch die Pfeile anschaulich dargestellt.
Es ergibt sich:

$$r \cos\alpha \cos\alpha + r \sin\alpha \sin\alpha = r$$
$$r (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = r$$

und

$$-\cos\alpha \sin\alpha + \cos\alpha \sin\alpha = 0$$

Wir sehen in der Herleitung eine anschauliche Begründung der Einstein´schen Summenkonvention in seiner erweiterten Form.

20. Das Produkt zweier beliebiger Basisvektoren $\mathbf{a_o}(\alpha_i)$ und $\mathbf{b_o}(\beta_k)$

Wir sind bisher davon ausgegangen Kronecker-Delta als Produkt des Einheitsvektors $\mathbf{a}_o$ mit sich selbst darzustellen. Es stellt sich die Frage, wie sich Kronecker-Delta ändert, wenn man das Produkt zweier Einheitsvektoren unterschiedlicher Richtung $\cos\alpha_i$ und $\cos\beta_k$ betrachtet:

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{a}_{o\,(\alpha i)}\,\mathbf{b}_{o\,(\beta k)}$$

Das sind die Einheitsvektoren zweier beliebiger Vektoren unterschiedlicher Richtung. Wir werden aus den Ergebnissen allgemeine Schlüsse auf die Multiplikation beliebiger Vektoren ziehen können. Die Einheitsvektoren können wir als Basisvektoren auffassen und erhalten:

$$\mathbf{a}_o = \mathbf{g}_r = \cos\alpha_i\,\mathbf{g}_i \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{g}_i = \cos\alpha_i\,\mathbf{g}_r$$

und

$$\mathbf{b}_o = \mathbf{g}_r = \cos\beta_k\,\mathbf{g}_k \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{g}_k = \cos\beta_k\,\mathbf{g}_r$$

Das Produkt lautet dann

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{g}_r\,\mathbf{g}_r = \cos\alpha_i\cos\beta_k\;\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_k$$

Das Produkt der beiden Winkelfunktionen nennen wir ebenfalls δ_{ik}, und wir wollen prüfen, ob diese Erweiterung der Bezeichnung berechtigt ist. Wir beziehen auf beiden Seiten auf die Richtung des Basisvektors

$$\mathbf{g}_r\,\mathbf{g}_r = (\cos\alpha_i\cos\beta_k)^2\,\mathbf{g}_r\,\mathbf{g}_r$$

$$\mathbf{g}_r\,\mathbf{g}_r = \delta^2_{ik}\,\mathbf{g}_r\,\mathbf{g}_r$$

Wir erhalten in basisfreier Darstellung

$$\delta^2_{ik} = (\cos\alpha_i\cos\beta_k)^2 = 1$$

ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}\delta^2_{ik} = ((&\cos\alpha_1\cos\beta_1) + (\cos\alpha_i\cos\beta_2) + (\cos\alpha_1\cos\beta_3)\\ +\ &(\cos\alpha_2\cos\beta_1) + (\cos\alpha_2\cos\beta_2) + (\cos\alpha_2\cos\beta_3)\\ +\ &(\cos\alpha_3\cos\beta_1) + (\cos\alpha_3\cos\beta_2) + (\cos\alpha_3\cos\beta_3))^2\end{aligned}$$

Das sind die Komponenten eines 4-stufigen Tensors mit den zu permutierenden Indizes (ik) und ($\alpha\beta$). Die Reihenfolge von ($\alpha\beta$) bzw. ($\beta\alpha$) ist von der Multiplikationsrichtung der beiden Basisvektoren abhängig:

$$\mathbf{S_o} = \mathbf{a}_o\,\mathbf{b}_o \qquad \text{oder}$$

$$\mathbf{S_o} = \mathbf{b}_o\,\mathbf{a}_o$$

Wir untersuchen zunächst die Multiplikation $\mathbf{a}_o\,\mathbf{b}_o$, das bedeutet, dass in der Rechnung die Indizes α und β nicht permutiert werden und wir nur einen

2-stufigen Tensor betrachten. Der Unterschied der Änderung der Multiplikationsrichtung wird durch die Änderung der Reihenfolge der Richtungskosinus beschrieben, das bedeutet:

$$\cos\alpha_i \cos\beta_k \quad \leftrightarrow \quad \cos\beta_i \cos\alpha_k$$

Es ist erkennbar, dass diese Änderung nur Einfluss auf einige Vorzeichen haben wird, insbesondere auf das Vorzeichen von γ.

Damit ergibt sich für die Komponenten des 2-stufigen Tensors $\mathbf{a}_o\, \mathbf{b}_o$:

$$\delta^2_{ik} = (\delta_{ii} + \delta^*_{ik})^2 = 1$$

$$= (\delta^2_{ii} + \delta_{ii}\, \delta^*_{ik} + \delta_{ii}\, \delta^*_{ki} + \delta^{*2}_{ik})$$
$$= (\delta^2_{ii} + \delta^{*2}_{ik})$$

Dabei wird die Änderung des Vorzeichens wegen der Reihenfolge der Indizes berücksichtigt:

$$\delta_{ii}\, \delta^*_{ik} + \delta_{ii}\, \delta^*_{ki} = \delta_{ii}\, (\delta^*_{ik} - \delta^*_{ik}) = 0$$

Die Ausdrücke δ_{ii} und δ^*_{ik} haben wir als Kosinus bzw. Sinus der Winkeldifferenz γ zweier Vektoren bereits kennengelernt:

mit $\quad \delta_{ii} = \cos\alpha_i \cos\beta_i = \cos\gamma$

und $\quad \delta^*_{ik} = -\cos\alpha_i \cos\beta_k = \sin\gamma \qquad (i \neq k)$

und $\quad \delta^*_{ik} = -\delta^*_{ki}$

Das bedeutet, dass der antimetrische Teil der Matrix tatsächlich verschwindet. Daraus folgt:

$$\delta^2_{ik} = (\delta_{ii} + \delta^*_{ik})^2 = ((\delta_{ii}^2 + (\delta^*_{ik} + \delta^*_{ki}) + \delta^{*2}_{ik})) = (\cos^2\gamma + \sin^2\gamma)$$

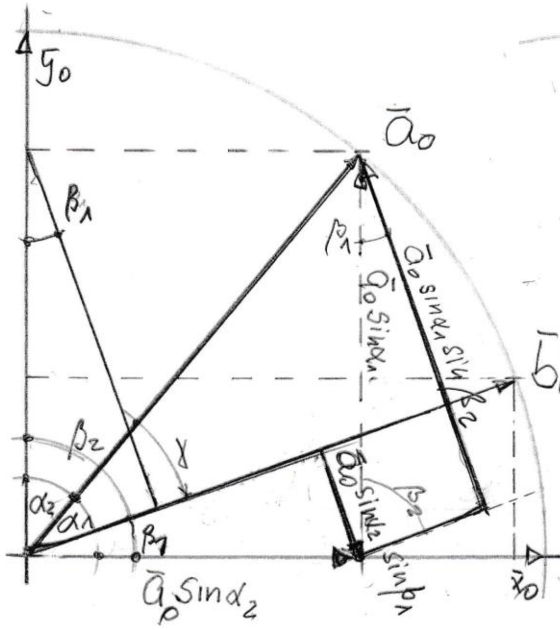
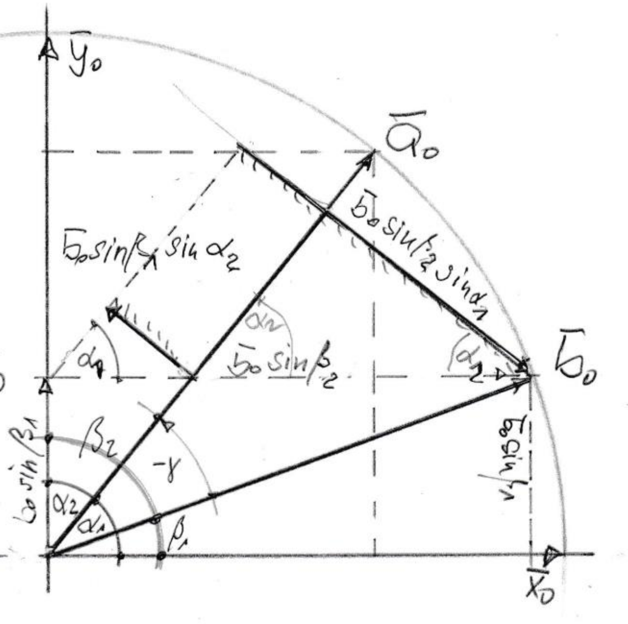
$$\delta^2_{ik} = (\cos^2\gamma + \sin\gamma^2) = 1^2$$

Dies ist eine allgemeine Form für Kronecker-Delta, für $\alpha = \beta$ und für $\alpha \neq \beta$. Die eingangs gestellte Frage nach der Berechtigung der Verwendung des Kronecker-Symbols auch bei ungleichen Winkeln kann daher bejaht werden.

Das Entfallen der Summe antimetrischen Glieder kann auch in der grafischen Darstellung abgelesen werden. Ausgeschrieben erhält man für den ebenen Fall

$$\delta^*_{ik}\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k = -\cos\alpha_i \cos\beta_k\ \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k = -\cos\alpha_1 \cos\beta_2\, \mathbf{g}_1\, \mathbf{g}_2 + \cos\alpha_2 \cos\beta_1\, \mathbf{g}_2\, \mathbf{g}_1 = \sin\gamma\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k$$
$$\delta_{ii}\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_i = \cos\alpha_i \cos\beta_i\ \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_i = \cos\alpha_1 \cos\beta_1\, \mathbf{g}_1\, \mathbf{g}_1 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2\, \mathbf{g}_2\, \mathbf{g}_2 = \cos\gamma\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_i$$

Der erste Ausdruck erscheint in der Darstellung in der Form von zwei Vektoren senkrecht zur Vektorachse mit verschiedenem Vorzeichen, die Differenz ergibt die Länge $\sin(\pm\gamma)$ je nach Multiplikationsrichtung.
Dies gilt für beide Projektionsrichtungen, also sowohl im Falle ($\mathbf{a}_o\mathbf{b}_o$) als auch für ($\mathbf{b}_o\mathbf{a}_o$) wie in dem nachfolgenden Bild dargestellt ist:

Sinusprodukt: Projektion $\mathbf{a_o}$ nach $\mathbf{b_o}$ Projektion $\mathbf{b_o}$ nach $\mathbf{a_o}$

Die erhaltenen Ergebnisse gelten auch für zwei Vektoren im Raum, da diese sich immer in ein ebenes Koordinatensystem transformieren lassen.

Gehen wir einen Schritt weiter und reduzieren die Gleichung auf die Basisvektoren, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_0 = \quad \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r &= \cos\alpha_i \cos\beta_k\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k \qquad = \delta_{ik}\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k \\ &= (\cos\alpha_i \cos\beta_k)^2\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r \\ &= \delta^2_{ik}\, \mathbf{1}\, \mathbf{1} = \ 1^2\, \mathbf{1}\, \mathbf{1} \end{aligned}$$

Als Ergebnis können wir feststellen, dass das Produkt zweier Einheitsvektoren im Anschauungsraum zweimal zweistufiger Tensoren unabhängig von der Winkeldifferenz γ ist.
Unabhängig vom Wert des Winkels γ ist der Betrag der Tensoren gleich Eins, da beide Vektoren Einheitsvektoren sind.
Im Abschnitt der Multiplikation von Vektoren werden wir erneut darauf zurückkommen.

21. Das Vektorielle Produkt

Lehrbuchmäßig wird die Vektormultiplikation getrennt in

1. Skalarprodukt S_s

   $S_s = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} =$
   $a_i\, \mathbf{g}_i \cdot b_k\, \mathbf{g}_k = a_i\, b_k\, \delta_{ik} = a_i\, b_i$

   Das Ergebnis ist vereinbarungsgemäß ein Skalar.

2. Vektorprodukt S_v

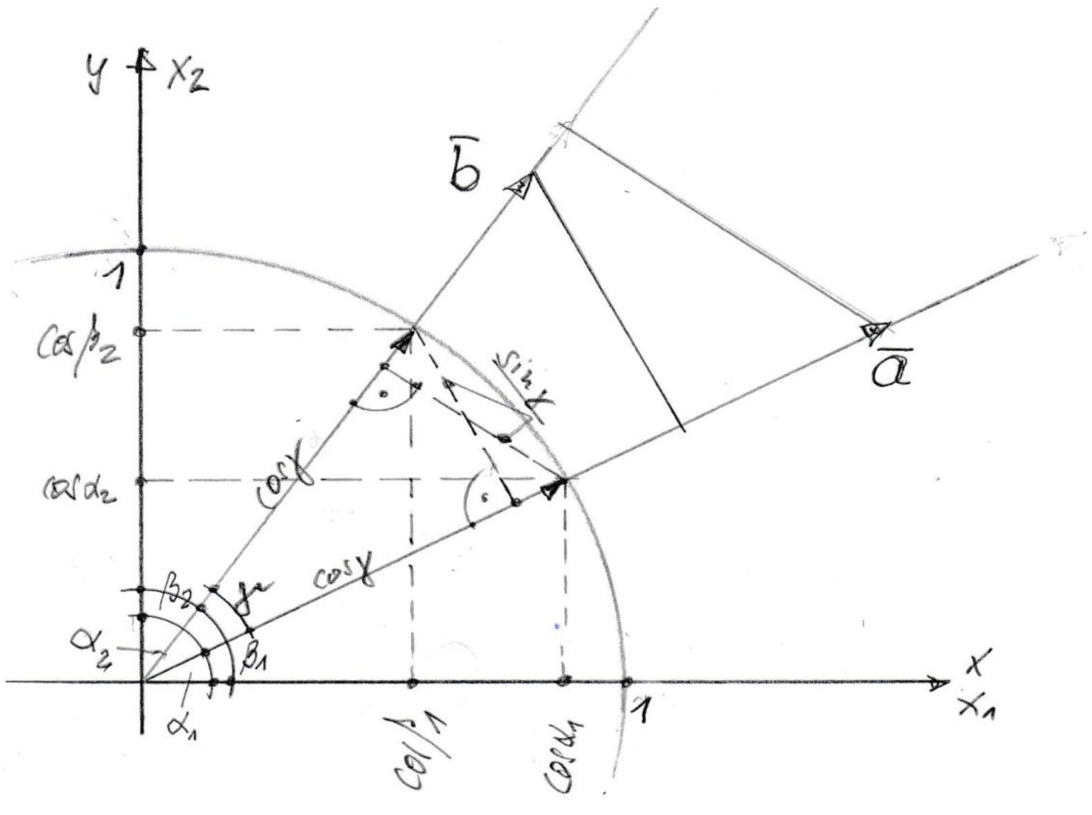
   $S_v = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_i\, b_k\, \mathbf{g}_m\, \varepsilon_{ikm}$

   Das Ergebnis ist vereinbarungsgemäß ein Vektor mit der Basis $\mathbf{g}_m$, die senkrecht zur Ebene ik angenommen wird.

Als Kommentar zu der Behandlung des Vektorproduktes mithilfe einer Hilfsbasis $\mathbf{g}_m$ sei hier aus dem Buch von Arthur Haas, „Vektor-Analysis“ (Berlin 1929, S.8) zitiert:
„Wegen des Auftretens gemischter Produkte gerichteter Größen ist die Vorstellung entstanden, es handele sich bei dem Vektorprodukt um eine „gerichtete Plangröße“. Dabei erwies es sich als zweckmäßig anstelle mit gerichteten Plangrößen, mit sie ergänzenden Hilfsvektoren zu rechnen, die senkrecht auf der Plangröße errichtet wurden.“

Wir wollen für die folgenden Untersuchungen auf die Vereinbarungen „Skalar- und Vektorprodukt“ keinen Bezug nehmen. Vielmehr sollen die algebraischen Regeln des Produktes von Faktoren gelten. Im Ergebnis wird sich die Einführung von Hilfsvektoren erübrigen.

Das Produkt zweier Vektoren weist zwangsläufig zwei Indizes auf. Nach unserer Verabredung soll ein n-fach indizierter Ausdruck als Tensor n-ter Stufe aufgefasst werden. Deshalb ist auch das Produkt zweier Vektoren formal ein Tensor 2. Stufe. Zur Unterscheidung von Tensor- oder Vektorprodukt soll dieses Produkt „**Vektorielles Produkt**“ genannt werden.



Mit den Vektoren

$\mathbf{a} = a_i\, \mathbf{g}_i = a \cos \alpha_i\, \mathbf{g}_i$ und

$\mathbf{b} = b_k\, \mathbf{g}_k = b \cos\beta_k\, \mathbf{g}_k$

erhalten wir für das Produkt

$\mathbf{S = a\, b} \;\; = a_i\, b_k\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k \;\; = a\, b \cos\alpha_i \cos\beta_k\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k$

Wir kennzeichnen den Tensor **S** durch Großbuchstaben und Fettdruck, normieren den Tensor, indem wir durch die Beträge (a b) dividieren und erhalten den Einheitstensor

$\mathbf{S}_o \;\; = \;\; \cos \alpha_i\, \mathbf{g}_i \cos \beta_k\, \mathbf{g}_k = \cos \alpha_i \cos \beta_k\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k$

Zur besseren Übersichtlichkeit besonders auch bei den grafischen Darstellungen wollen wir im Folgenden nur mit dem Einheitstensor rechnen. Die Komponenten von $\mathbf{S}_o$ haben wir schon als Kronecker-Delta mit unterschiedlichen Richtungswinkeln α_i und β_k untersucht. Wegen des anderen Zusammenhangs kommen wir noch einmal darauf zurück.
Ausgeschrieben ergibt sich für den Tensor:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_o = {} & \cos \alpha_1 \mathbf{g}_1 \cos \beta_1 \mathbf{g}_1 + \cos \alpha_1 \mathbf{g}_1 \cos \beta_2 \mathbf{g}_2 + \cos \alpha_1 \mathbf{g}_1 \cos \beta_3 \mathbf{g}_3 \\ & + \cos \alpha_2 \mathbf{g}_2 \cos \beta_1 \mathbf{g}_1 + \cos \alpha_2 \mathbf{g}_2 \cos \beta_2 \mathbf{g}_2 + \cos \alpha_2 \mathbf{g}_2 \cos \beta_3 \mathbf{g}_3 \\ & + \cos \alpha_3 \mathbf{g}_3 \cos \beta_1 \mathbf{g}_1 + \cos \alpha_3 \mathbf{g}_3 \cos \beta_2 \mathbf{g}_2 + \cos \alpha_3 \mathbf{g}_3 \cos \beta_3 \mathbf{g}_3\end{aligned}$$

Da es sich bei den Komponenten um gerichtete Größen handelt, ist eine Ausführung der Addition nur graphisch in der Form von Kraftecken möglich. Dies wird weiter unten auch dargestellt.

In einem ersten Schritt wollen wir versuchen einen arithmetischen Weg der Zusammenfassung der Vektorkomponenten zu finden.
Das Vorkommen von Produkten gemischter Komponenten der Basisvektoren gibt Anlass zu versuchen, ob das Ziel erreicht werden kann, indem statt ihrer die Basisvektoren selbst verwendet werden. Das ist tatsächlich der Fall:

$$\mathbf{S}_o = \cos\alpha_i \cos\beta_k\, \mathbf{g_i}\, \mathbf{g}_k = (\cos\alpha_i \cos\beta_k)\,(\cos\alpha_i \cos\beta_k)\, \mathbf{g_r}\, \mathbf{g}_r$$

Wir erkennen, dass die Matrix der Komponenten der Basisvektoren gleich der Matrix der Komponenten des Produktes der Basisvektoren ist.
Damit ergibt sich die folgende Zusammenfassung: Der Einheitstensor $\mathbf{S}_o$ ist offenbar ein zweistufiger Tensor von der Form

$$\mathbf{S_o} = (\cos\alpha_i \cos\beta_k)\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k = (\delta_{ik})\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k$$

oder

$$\mathbf{S_o} = (\cos\alpha_i \cos\beta_k)^2\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r = (\delta_{ik})^2\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r$$

Permutiert werden die Indizes (α,β) und (i,k). Dabei stehen (α,β) und (β,α) für die Richtung der Multiplikation und damit die Richtung der Projektion, also entweder **a b** oder **b a.** Die Permutationen (i,k) und (k,i,) stehen für die Projektionen der x_i und x_k. Wir wollen die Permutationen ausschreiben für n=2 und für die Multiplikationsrichtung **a b**. Die Multiplikationsrichtung **b a** erklärt sich durch entsprechende Vertauschung und ist bildlich weiter unten dargestellt.
Es soll die Summenkonvention in der vorgeschlagenen erweiterten Form gelten. Ferner werden die die Ergebnisse für die Winkeldifferenz $\gamma = \angle(\mathbf{ab})$ verwendet.
Die beiden Summenausdrücke lauten ausgeschrieben:

$$\mathbf{S}_o = (\cos\alpha_i \cos\beta_k)\,(\cos\alpha_i \cos\beta_k)\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r$$

Für die Winkeldifferenz γ gilt (für n=2):

$$\cos\gamma = (\cos\alpha_i \cos\beta_i) \qquad = \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2 \qquad = \delta_{ii} \qquad (i=k)$$

$$\sin\gamma = (\cos\alpha_{\mathbf{k}} \cos\beta_{\mathbf{i}}) \qquad = \cos\alpha_2 \cos\beta_1 - \cos\alpha_1 \cos\beta_2 \qquad = \delta^*_{ki} \qquad (i\neq k)$$

Für die bessere Übersicht verwenden wir die abkürzenden Kronecker-Symbole:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_o &= (\delta_{ik})^2\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r = (\delta^2_{ii} + \delta_{ii}\,(\delta^*_{ik} + \delta^*_{ki}) + \delta^{*2}_{ki})\\ &= (\delta^2_{ii} + \delta^{*2}_{ki})\, \mathbf{g}_r \mathbf{g}_r \qquad \text{mit} \quad (\delta^*_{ik} + \delta^*_{ki}) = 0\\ &= (\cos^2\gamma + \sin^2\gamma)\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r = \mathbf{1} \bullet \mathbf{1}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Ergebniskette für die Multiplikation zweier Vektoren:

$$\mathbf{S} = \mathbf{a}\,\mathbf{b} = ab\, \mathbf{S}_o = a\, b\, (\cos^2\gamma + \sin^2\gamma)\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r = a\, b\, \mathbf{g_r}\, \mathbf{g}_r = \mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{b}\,\mathbf{a}$$

Das ist ein bemerkenswertes Ergebnis:
Die Multiplikation zweier Vektoren unterschiedlicher Richtung α_i und β_k führt unabhängig von der Reihenfolge der Multiplikation auf zwei formal identische 2-stufigen Tensoren.

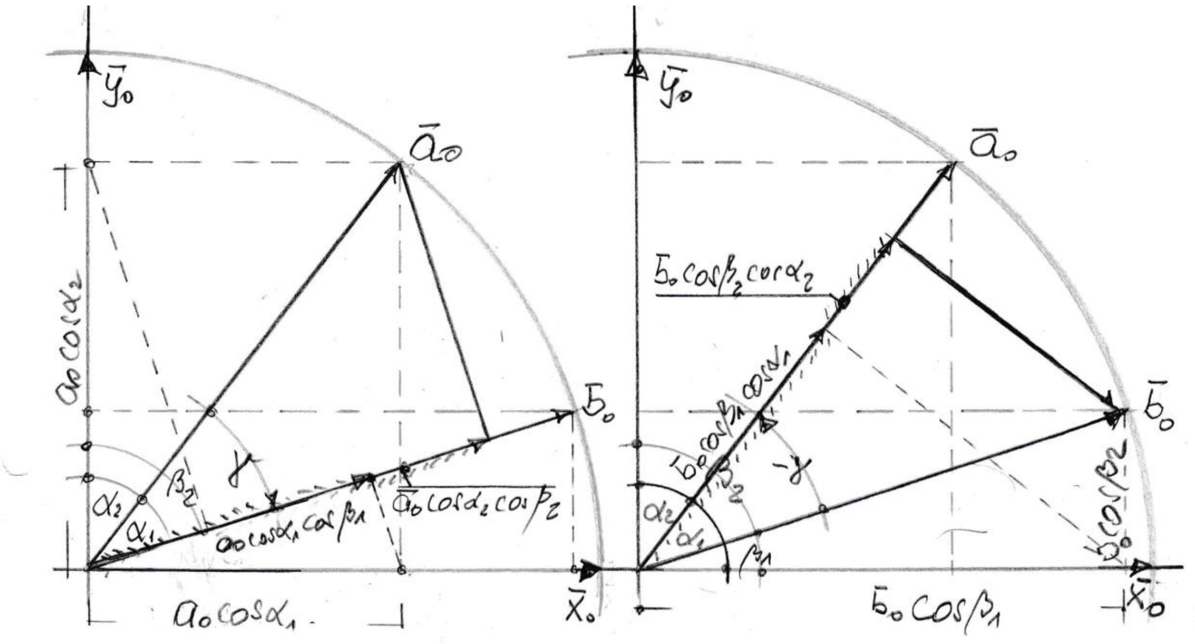
Die Multiplikation von Vektoren ist damit kommutativ.

Die Darstellung wurde abgeleitet für den räumlichen Fall, (i, k) = 3. Die beiden Vektoren **a** und **b** liegen frei im Raum in der durch den Winkel γ festgelegten Ebene.

Die Rechnung führt auf einige neue Darstellungen, für die bisher keine Bezeichnungen vereinbart sind:

Den symmetrischen Tensor $\mathbf{S}^s = a_i\, b_i\, \mathbf{g_k}\, \mathbf{g_k}$ wollen wir nicht mehr „Skalarprodukt“ nennen, sondern schlagen die Bezeichnung „**Kosinusprodukt**“ vor wegen des Auftretens des Richtungskosinus bei der Projektion eines Vektors.
Den antisymmetrischen Tensor $\mathbf{S}^a = a_i\, b_k\, \mathbf{g_i}\, \mathbf{g_k}$ nennen wir auch nicht mehr „Vektorprodukt“ sondern wegen des Vorkommens des Richtungssinus **„Sinusprodukt“**.
Die beiden neuen Begriffe bezeichnen 2-stufige Tensoren. Diese Bezeichnungen sollen im Folgenden verwendet werden.

22. Kosinus-Produkt: Graphischer Weg



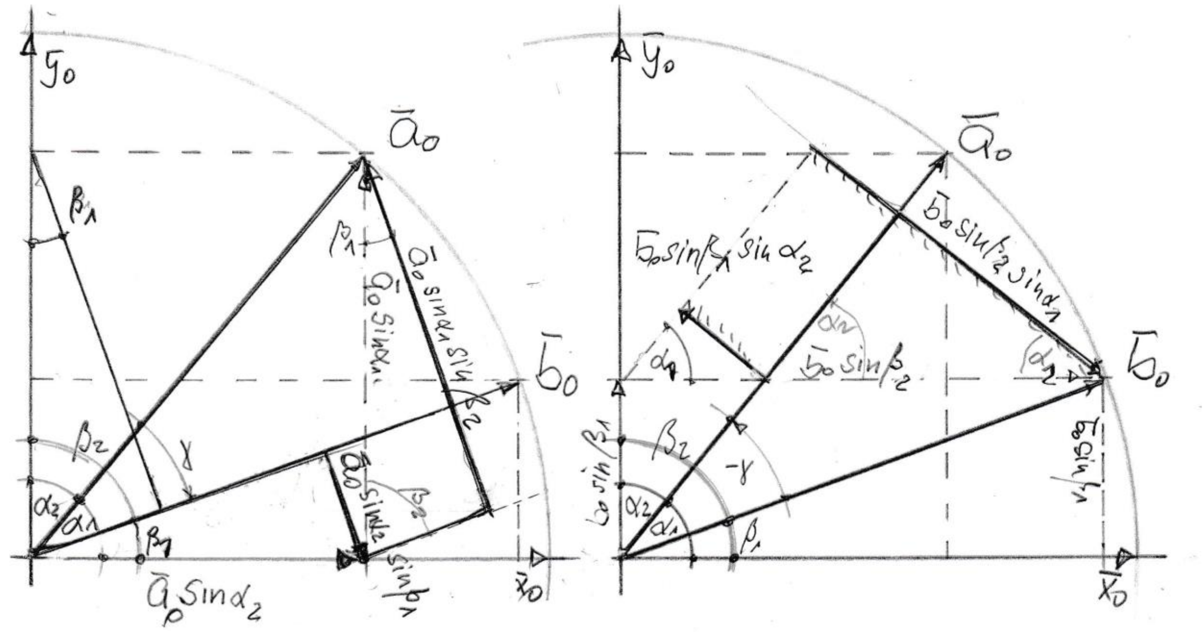
Kosinusprodukt: Projektion von $\mathbf{a_o}$ nach $\mathbf{b_o}$ Projektion von $\mathbf{b_o}$ nach $\mathbf{a_o}$

Eine Verbesserung des Verständnisses erhalten wir durch die graphische Darstellung für n=2.
Man erkennt, dass es zwei Ergebnisse des Kosinus-Produktes gibt: je nach Reihenfolge der Faktoren ergeben sich unterschiedliche Projektions-Richtungen und damit zwei Vektorrichtungen als Ergebnis, nämlich $\mathbf{a_0}$ oder $\mathbf{b_0}$.
Dabei ist zu beachten, dass das Vorzeichen der Winkeldifferenz γ von der Reihenfolge der Faktoren bestimmt wird.
Auch hier zeigt sich, dass das Kosinus-Produkt eine „gerichtete" Größe ist und deshalb kein Skalar.
Wir lesen in der graphischen Darstellung ab und erhalten im Einzelnen $\mathbf{a_o}$ $\mathbf{b_o}$, indem wir die Komponenten der Richtungswinkel in den einzelnen Dreiecken projizieren. Das bedeutet z.B. für die Ermittlung der Elemente der Hauptdiagonalen der Matrix $\mathbf{S_o}$ für das Kosinus-Produkt:

$$\mathbf{a_o} \cos\gamma = \mathbf{a_o} (\cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2)$$
$$\mathbf{b_o} \cos(-\gamma) = \mathbf{b_o} (\cos\beta_1 \cos\alpha_1 + \cos\beta_2 \cos\alpha_2) = \mathbf{b_o} \cos \gamma$$

Es gibt zwei Ergebnisse je nachdem, ob man auf $\mathbf{a_0}$ oder auf $\mathbf{b_0}$ projiziert. Die Ergebnisse haben den gleichen Betrag aber die unterschiedlichen Richtungen $\mathbf{a_0}$ und $\mathbf{b_0}$.
Wir interpretieren die Änderung der Reihenfolge von ik nach ki als Vorzeichenwechsel von γ nach $(-\gamma)$ und auf die Projektionsreihenfolge $\mathbf{a_0}$ auf $\mathbf{b_0}$ und umgekehrt. Diese Interpretation ist hier möglich, weil die Änderung des Vorzeichens von γ auf das Vorzeichen von $\cos \gamma$ keinen Einfluss hat.

23. Sinus-Produkt: Graphischer Weg



Sinusprodukt: Projektion a_o nach b_o Projektion b_o nach a_o

Wir lesen aus der Darstellung ab und erhalten für das Sinus-Produkt:

$$\mathbf{a_o}\sin\gamma = \mathbf{a_o}(\sin\alpha_1\sin\beta_2 - \sin\alpha_2\sin\beta_1)$$
$$\mathbf{b_o}\sin(-\gamma) = \mathbf{b_o}(\sin\beta_2\sin\alpha_1 - \sin\beta_1\sin\alpha_2) = -\,\mathbf{b_o}\sin\gamma$$

In Index-Schreibweise lautet damit das Ergebnis der Vektormultiplikation

$$\mathbf{S}_o = (\cos\alpha_i\cos\beta_i)^2\,\mathbf{g_r}\,\mathbf{g}_r + (\cos\alpha_i\cos\beta_k)^2\,\mathbf{g_r}\,\mathbf{g}_r$$
$$\mathbf{S}_o = (\cos\alpha_i\cos\beta_k)^2\,\mathbf{g_r}\,\mathbf{g}_r$$
$$\mathbf{S}_o = (\cos^2\gamma + \sin^2\gamma)\,\mathbf{g_r}\,\mathbf{g}_r$$

Der Ergebnis-Tensor liegt in der Ebene der Vektoren **ab,** es gibt keine Vektoren, die zu dieser Ebene senkrecht stehen, wie es z.B. für das klassische Vektorprodukt angenommen wird.

24. Vektorielles Produkt: Zusammenfassung:

Unter einem „Vektoriellen Produkt" wollen wir das Produkt zweier Vektoren verstehen. Es sollen die algebraischen Regeln des Produktes gelten und die üblichen Vereinbarungen über Skalar- und Vektorprodukt nicht angewandt werden. Folgende Nachweiskette ergab sich:

mit: $\sin\gamma = -\cos\alpha_i \cos\beta_k \qquad (i \neq k)$

$\cos\gamma = \cos\alpha_i \cos\beta_i \qquad (i = k)$

$$\delta_{ik}\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k = \cos\alpha_i \cos\beta_k\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k = (\cos\gamma + \sin\gamma)\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k$$

$$\delta^2_{ik}\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r = (\cos\alpha_i \cos\beta_k)^2\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r = (\cos^2\gamma + \sin^2\gamma)\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r = \mathbf{1}\,\mathbf{1}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{a}\,\mathbf{b}$$

$$= a_i\, b_k\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k$$

$$= a\, b \cos\alpha_i \cos\beta_k\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k \qquad = a\, b\, (\cos\gamma + \sin\gamma)\, \mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k$$

$$= a\, b\, (\cos\alpha_i \cos\beta_k)\, (\cos\alpha_i \cos\beta_k)\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r = a\, b\, (\cos^2\gamma + \sin^2\gamma)\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r$$

$$= a\, b\, 1\, \mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r$$

$$= a\, b\, \mathbf{1}\,\mathbf{1}$$

$$= \mathbf{a}\,\mathbf{b}$$

$$= \mathbf{b}\,\mathbf{a}$$

Das ist eine allgemeine Form des Vektoriellen Produktes.

Die Nachweiskette wird bestimmt durch den Wegfall der Summe der antisymmetrischen Tensor-Elemente. Das Ergebnis beschreibt eine überraschende Dualität für die Reihenfolge der Vektoren.

Permutiert werden die Indizes (α,β) und (i,k). Dabei stehen (α,β) und (β,α) für die Richtung der Multiplikation und damit die Richtung der Projektion, also entweder **a b** oder **b a.**

Wegen der 4 permutierbaren Indizes ist das Ergebnis des Vektoriellen Produktes formal ein Tensor 4. Stufe, wenn man die beiden Projektionsrichtungen als Permutationen auffasst.

Auffallend ist, dass δ^2_{ik} als Skalar darstellbar ist, während δ_{ik} seine Eigenschaft als Tensor behält. Deshalb haben wir die Basisvektoren $\mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k$ nicht herausgekürzt, während für δ^2_{ik} die Basisvektoren $\mathbf{g}_r\, \mathbf{g}_r$ entfallen können und eine basisfreie Darstellung möglich ist.

Hier wird deutlich, dass das Vektorielle Produkt als vektorielle und als arithmetische Multiplikation behandeln werden kann mit der Folge unterschiedlicher Schreibweisen und geometrischer Bedeutungen (vgl. Kapitel 15).

Da den beiden Basisvektoren g_r g_r eine Reihenfolge nicht mehr zugeordnet werden kann, ebenso wenig wie den skalaren Ausdrücken a **und** b**, ist dieses Ergebnis bezüglich der beiden ursprünglichen Richtungen invariant. Hiermit begründen wir unsere Schlussfolgerung, dass die Multiplikation von Vektoren im Anschauungsraum des 4-stufigen Tensors kommutativ ist.**

Das ist ein Ergebnis, das Einfluss auf die Grundlagen der Linearen Algebra haben könnte. Die Grundlagen der Linearen Algebra werden wesentlich bestimmt durch die mathematischen Elemente Skalarprodukt und Vektorprodukt. Das Vektorprodukt ist aber nicht kommutativ und stört dadurch die einheitliche Ordnung der Grundrechenarten der Vektorrechnung und allgemein der Linearen Algebra.

25. Summe von Skalar- und Vektorprodukt: Das Vektorielle Produkt

Wir können das *Vektorielle Produkt* als Summe von *Skalar- und Vektorprodukt* auffassen, oder in unserer neuen Bezeichnung von *Kosinus- und Sinusprodukt* der beiden Vektoren **a** und **b**.

Das Produkt der beiden Vektoren wird als zweistufiger Tensor eingeführt, der aus zwei Teilen besteht, die dem Skalar- und dem Vektorprodukt entsprechen. Zahlenmäßig werden zugehörigen Einheitsvektoren durch den Kosinus und den Sinus des Winkels γ repräsentiert, der von den beiden Vektoren eingeschlossen wird. Es gilt also:

$$\mathbf{a\,b} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$= a \cos\alpha_i\, b \cos\beta_k\, \mathbf{g}_i \bullet \mathbf{g}_k + a \cos\alpha_i\, b \cos\beta_k\, \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_k$$

$$= a\, b\, (\cos\alpha_i \cos\beta_k)\, (\mathbf{g}_i \bullet \mathbf{g}_k + \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_k)$$

Wir wissen, dass das Skalarprodukt aus der Summe der Glieder der Hauptdiagonalen gebildet wird, das Vektorprodukt aus den antisymmetrischen Teilen des Tensors. Das Produkt der Basisvektoren wird auch als Metriktensor $\mathbf{g}_{ik}$ bezeichnet und ist identisch mit Kronecker-Delta:

$$\mathbf{g}_i\, \mathbf{g}_k = \mathbf{g}_{ik} = \delta_{ik}$$

Daraus folgt: $\mathbf{a\,b} = a\, b\, (\cos\alpha_i \cos\beta_k)\, (\mathbf{g}_{ii} + \mathbf{g}^*_{ik})$

$$= a\, b\, (\cos\alpha_i \cos\beta_k)^2\, (\mathbf{g}_r \bullet \mathbf{g}_r + \mathbf{g}_r \times \mathbf{g}_r) = a\, b\, (\cos\alpha_i \cos\beta_k)^2\, \mathbf{g}_{rr}$$

Wir dividieren durch den Betrag (a b) des Tensors und erhalten das Produkt zweier Einheitstensoren

$$\mathbf{a}_o \mathbf{b}_o = (\cos\alpha_i \cos\beta_k)^2\, \mathbf{g}_{rr}$$

$$= ((\cos\alpha_i \cos\beta_i)^2 + (\sin\alpha_i \sin\beta_k)^2)\, \mathbf{g}_{rr} \quad (i \neq k)$$

$$= (\cos^2\gamma + \sin^2\gamma)\, \mathbf{g}_{rr}$$

$$\mathbf{a}_o \mathbf{b}_o = 1\, \mathbf{g}_{rr} = \mathbf{1\ 1}$$

Damit haben wir auch Skalar- und Vektorprodukt übergeführt in das neu beschriebene vektorielle Produkt. Grundlage der Rechnung ist der neue Basisvektor, der die Richtung des zugehörigen Vektors abbildet.

Von der Bezeichnung „Metriktensor“ wollen wir im Folgenden keinen Gebrauch mehr machen. Es genügt auf die Möglichkeit dieser Schreibweise hingewiesen zu haben, die in vielen Lehrbüchern verwendet wird.

26. Vektorielles Produkt und Kronecker-Delta

Weitere wichtige Ergebnisse betreffen die Bedeutung des Symbols δ_{ik}, bekannt als Kronecker-Delta. Wir entwickeln die Bedeutung als Ergebnis der Multiplikation zweier Basisvektoren und definieren:

(n=3): $\delta_{ik}^2 = (\cos\alpha_i \cos\beta_k)^2$
$= (\delta^*_{ik} + \delta_{ii})^2 = 1$
$= (\delta^*_{ik}{}^2 + \delta_{ii}{}^2) = 1$

Das gilt, weil:
mit $\delta^*_{ik} = (\sin\alpha_i \sin\beta_k) = \sin\gamma$ mit $(i \neq k)$
und $\delta_{ii} = (\cos\alpha_i \cos\beta_i) = \cos\gamma$

folgt $\delta_{ik} = \sin\gamma + \cos\gamma$
$\delta_{ik}^2 = (\sin\gamma + \cos\gamma)^2 = 1$
und $= (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) = 1$

und für den Fall

(n=2), (γ=0): $\delta_{ik}^2 = (\cos^2\alpha_i)^2 = 1$
$\delta_{ik} = (\cos^2\alpha_i) = 1$
mit $(\delta^*_{ik} + \delta^*_{ki}) = 0$
ausgeschrieben $\delta_{12} = - \delta_{21} = ½ \sin 2\alpha$ $\alpha = \alpha_1 = (90^o - \alpha_2)$

Bei den Ableitungen wurde die erweiterte Einstein´sche Summenkonvention verwendet.

Die Verwendung des Zeichens * in δ^*_{ik} soll bedeuten, dass es sich um die Summe nur der antimetrischen Tensor-Elemente handelt, im Gegensatz zu dem Ausdruck δ_{ik} , der die Summe aller Elemente des Tensors enthalten soll.

Wir stellen fest, dass die Elemente des Kronecker-Symbols δ_{ik} identisch sind mit den Komponenten der vektoriellen Multiplikation zweier Basisvektoren. Das ist ein Zusammenhang, den wir bei einer Vielzahl von Rechenoperationen nützen wollen zur Vereinfachung der Schreibweise.

27. Geometrische Deutung

Was bedeuten die Ergebnisse?
Das Vektorielle Produkt hat zwei Ergebnisse, die von der Reihenfolge der Multiplikation abhängig sind. (Vgl. Darstellung am Ende des Kapitels).

Wir definieren, dass bei der Multiplikation zweier Vektoren die Reihenfolge auch die Richtung der Projektion bestimmt: der erste Vektor wird auf den zweiten projiziert.

$$\mathbf{S_a} = \mathbf{ab} \quad \text{und} \quad \mathbf{S_b} = \mathbf{ba}$$

Wir erhalten zwei Tensoren 2. Stufe, beide Tensoren sind von gleichem Betrag, haben aber unterschiedliche Richtungen. Die Richtung des Tensors wird bestimmt durch die Richtung des ersten Vektor

Ein Vektor ist ein mathematisches Element, das Abstand und Richtung eines Ortes oder eines materiellen Punktes vom Ursprung beschreibt.
Das bedeutet auch, dass ein Vektor über den Weg zu dem Ort oder zu dem Punkt keine Aussage macht. Es sind also verschiedene Wege möglich.

Die **dicke Linie**, die wir uns als Vektor vorstellen, besteht nur aus einer Richtung und zwei Orten.

Die **gestrichelte Linie** gebildet aus den Katheten des Pythagoras-Dreiecks besteht aus zwei (bzw. im räumlichen Fall drei) gerichteten Strecken unterschiedlicher Richtung, die zusammen den Ursprung mit dem Ort verbinden.

1. Die einfachste Verbindung ist die gerade (dicke) Linie. Diese wird durch den Satz des Pythagoras bestimmt:

   $$\mathbf{ab} = ab\,(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma)\,\mathbf{g_r}\,\mathbf{g_r}$$

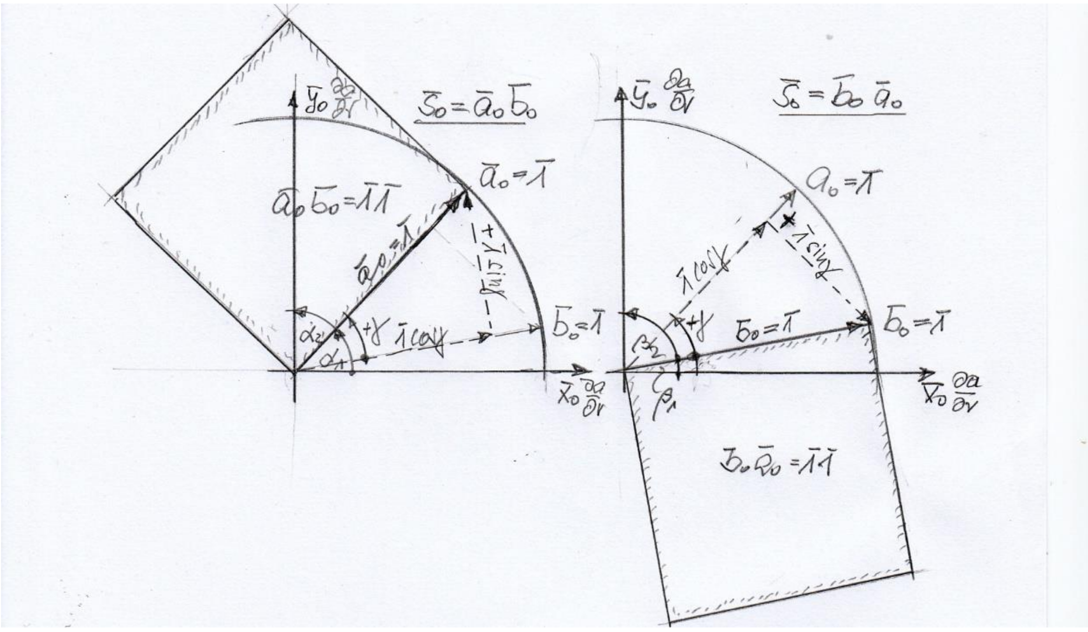
   Dies ist das arithmetische Ergebnis der Vektor-Multiplikation.

2. Die zweite Verbindung ist die gestrichelte Linie. Diese wird durch die Vektoren bestimmt, die die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks bilden:

   $$\mathbf{ab} = a\,b\,(\cos\gamma + \sin\gamma)\,\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_k$$

   Dies ist das vektorielle oder geometrische Ergebnis der Multiplikation zweier Vektoren.

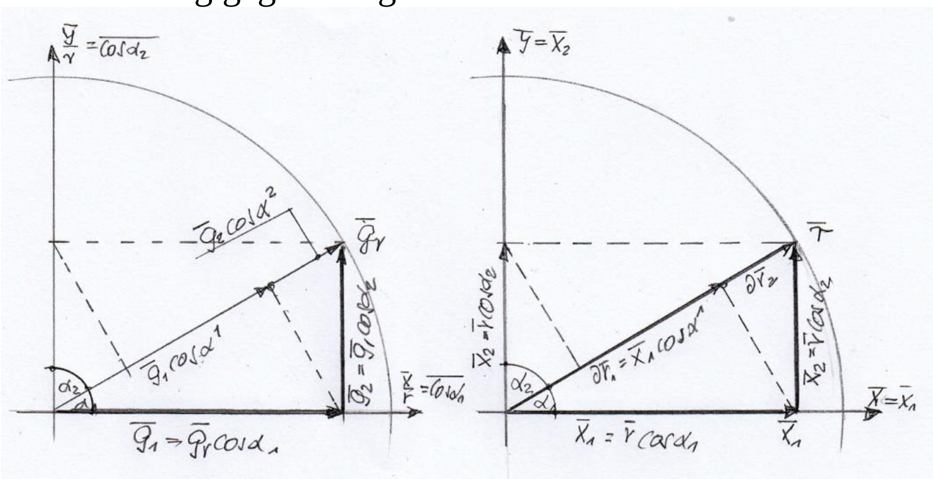
Das bedeutet, es gibt für die Multiplikation von Basisvektoren für jede Projektionsrichtung zwei Ergebnisse, die durch jeweils zwei unterschiedliche Wege von O nach X dargestellt werden.



28. Vergleich: arithmetische und vektorielle Darstellung

Wir haben bei der Herleitung des Kronecker-Symbols auf die Unterscheidung kovarianter und kontravarianter Komponenten verzichtet, da das Ergebnis davon nicht beeinflusst wurde. Das wollen wir nachholen und untersuchen, welchen Einfluss die Unterscheidung haben kann.

Deshalb sollen im Folgenden Basisvektor und Vektor sowie arithmetische und vektorielle Darstellung gegenübergestellt werden.



Anschauungsraum

des Basisvektors	**des Vektors**
arithmetische Darstellung	**arithmetische Darstellung**
$\mathbf{g_r} = \mathbf{g}_1\cos\alpha^1+\mathbf{g}_2\cos\alpha^2 = \mathbf{g_i}\cos\alpha^k$	$\mathbf{r} = \Sigma\partial\mathbf{r} = \mathbf{\Sigma}\partial r\,\mathbf{g}_r = x_i\cos\alpha^i\,\mathbf{g}_r$
mit $\mathbf{g_i} = \mathbf{g}_r\cos\alpha_i$ folgt	$\mathbf{r}_o = x_i/r\cos\alpha^k\,\mathbf{g}_r = \cos\alpha_i\cos\alpha^k\,\mathbf{g}_r$
$\mathbf{g_r} = \mathbf{g}_r\cos\alpha_i\cos\alpha^k$	$\mathbf{g_r} = \mathbf{g}_r\cos\alpha_i\cos\alpha^k$
und $\cos\alpha_i\cos\alpha^k = 1$	und $\cos\alpha_i\cos\alpha^k = 1$
geometrische Darstellung	**geometrische Darstellung**
$\mathbf{g_r} = \mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2 = \Sigma\,\mathbf{g}_i$	$\mathbf{r} = \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} = \Sigma\,\mathbf{x_i} = x_i\,\mathbf{g}_k$
mit $\mathbf{g_i} = \mathbf{g}_r\cos\alpha_i$ folgt	mit $\mathbf{g_k} = \mathbf{g}_r\cos\alpha_k$
$\mathbf{g_r} = \Sigma\,\mathbf{g}_i = \Sigma\,\mathbf{g}_r\cos\alpha_i$	und $x_i/r = \cos\alpha_i$ folgt
und $\mathbf{g_r} = \mathbf{g}_r\,(\mathbf{\cos\alpha_1} + \mathbf{\cos\alpha_2})$	$\mathbf{g_r} = \mathbf{g}_r\cos\alpha_i\cos\alpha_k$
oder $\mathbf{1} = (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$	und $1 = (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2)$
oder $\mathbf{g_r} = \mathbf{g}_1+\mathbf{g}_2 = \Sigma\,\mathbf{g}_i$	oder $\cos^2\alpha_i = 1$

Die geometrische Darstellung der Basisvektoren führt auf die Summe ihrer Komponenten. Die Komponenten sind aber gerichtete Größen und dürfen nicht arithmetisch addiert werden. Wir können sie daher auch als „geometrische“ Summe bezeichnen.

Das wird besonders sichtbar, wenn man den Basisvektor $\mathbf{g}_r$ aus der Gleichung herauskürzt und ein basisfreier Ausdruck verbleibt. Wir haben deshalb hier diejenigen Summanden der basisfreien Darstellung mit Fettdruck als gerichtete Größen gekennzeichnet, die nicht arithmetisch addiert werden können.

Als Vektorgrößen beschreiben sie den 2. Weg, der als Verbindung des Ursprungs mit einem Ort oder einem Punkt möglich ist.

Als Ergebnis der Darstellung stellen wir fest, dass die arithmetische Darstellung eines Vektors kontravariant ist, die vektorielle Darstellung kovariant. Die Berücksichtigung dieses Unterschiedes führt auf zwei verschiedene geometrische Lösungen, die wir als den **1. und 2. Weg** bezeichnet haben.

Als Ergebnis wollen wir die kovariante und die kontravariante Form des Abstandsvektors gegenüber stellen:

kovariant: $\mathbf{a} = a_i\, \mathbf{g}_i = a \cos\alpha_i\, \mathbf{g}_i = a \cos\alpha_i \cos\alpha_i\, \mathbf{g}_r$

kontravariant: $\mathbf{a} = a\, \mathbf{g}_r \cos\alpha_i \cos\alpha^i = a \cos\alpha_i \cos\alpha^i\, \mathbf{g}_r$

Für den Betrag a gilt in linearer Näherung:

$$a = a\frac{\partial a}{\partial r}$$ und wir erhalten

$$a\frac{\partial a}{\partial r} \cos\alpha_i \cos\alpha_i\, \mathbf{g}_r = a\,\frac{\partial a}{\partial r} \cos\alpha_i \cos\alpha^i\, \mathbf{g}_r$$

$$\cos\alpha_i \cos\alpha_i = \cos\alpha_i \cos\alpha^i$$

$$1 = \frac{x_i^2}{r^2} = \frac{x_i}{r}\frac{\partial r}{\partial x_i}$$

Wir erhalten auf der linken Seite den Pythagoras und rechts die Linearbedingung der Vektorrechnung. Das bedeutet, dass beide Aussagen identisch sind. Sie betreffen die Richtung des Vektors. Der Ausdruck $a = a\frac{\partial a}{\partial r}$ beschreibt die Änderung des Abstandes a.

29. Die Jacobi-Matrix

Die arithmetische Form des Produktes zweier Basisvektoren hat in basisfreier Darstellung das kontravariante Ergebnis:

$$(\cos\alpha_i \cos\alpha^k)^2 = 1$$

Wir haben gezeigt, dass dies die Form des Kronecker-Symbols ist. Es ergab sich ferner, dass diese Form auch für zwei unterschiedliche Winkel α und β gültig ist, und die Änderung der Reihenfolge der Faktoren auf entsprechend geänderte Vorzeichen führt. Es gilt also:

$$(\cos\alpha_i \cos\beta^k)^2 = (\cos\beta_i \cos\alpha^k)^2 = 1$$

Die beiden Ausdrücke stehen für die beiden möglichen Projektionsrichtungen, also von **a** nach **b** oder entgegengesetzt. Wir wählen den ersten Ausdruck, der für die Multiplikation der Basisvektoren $\mathbf{a}_o\mathbf{b}_o$ steht, und erhalten mit

$$\cos\alpha_i = \frac{\partial x_i}{\partial r} \quad \text{und} \quad \cos\beta^k = \frac{\partial r}{\partial \xi_k}$$

$$\cos\alpha_i \cos\beta^k = \frac{\partial x_i}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi_k}$$

$$\delta_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = J_{ik}$$

und entsprechend für die andere Projektionsrichtung:

$$\cos\beta_i \cos\alpha^k = \frac{\partial \xi_i}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_k}$$

$$\delta_{ik} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = J_{ik}^{-1}$$

Das Ergebnis ist ein Differential, das als Jacobi-Matrix bekannt ist, und das wir mit der Abkürzung J bezeichnet haben. Die Änderung der Projektionsrichtung führt auf eine inverse Matrix J^{-1}.

Die Elemente sind die Komponenten des Tensors, den wir als Kronecker-Delta kennen. Diese lauten ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} = \delta_{ik} = J_{ik}$$

Die zweite Form ist die Inverse der ersten, so dass wir als Ergebnis erhalten:

$$\delta_{ik}\,\delta^{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = 1 = J\,J^{-1}$$

Das Ergebnis ist bemerkenswert: die Änderung der Reihenfolge der Faktoren bei der Multiplikation von Basisvektoren führt auf eine Tensor-Matrix, die wir als inverse Form der Jacobi-Matrix kennen.

30. Die Linearform einer Vektorfunktion

(vgl Paesler S. 102 ff)
In einem kugelsymmetrischen Zentralfeld ist ein Ort X definiert durch einen unveränderlichen Abstand r vom Ursprung, die Lage eines verschieblichen Punktes P durch seinen Abstand a vom Ursprung. Wir untersuchen Orte und Punkte, deren Richtung durch eine gemeinsame Richtung bestimmt wird. Die Feldbeschreibung lautet dann

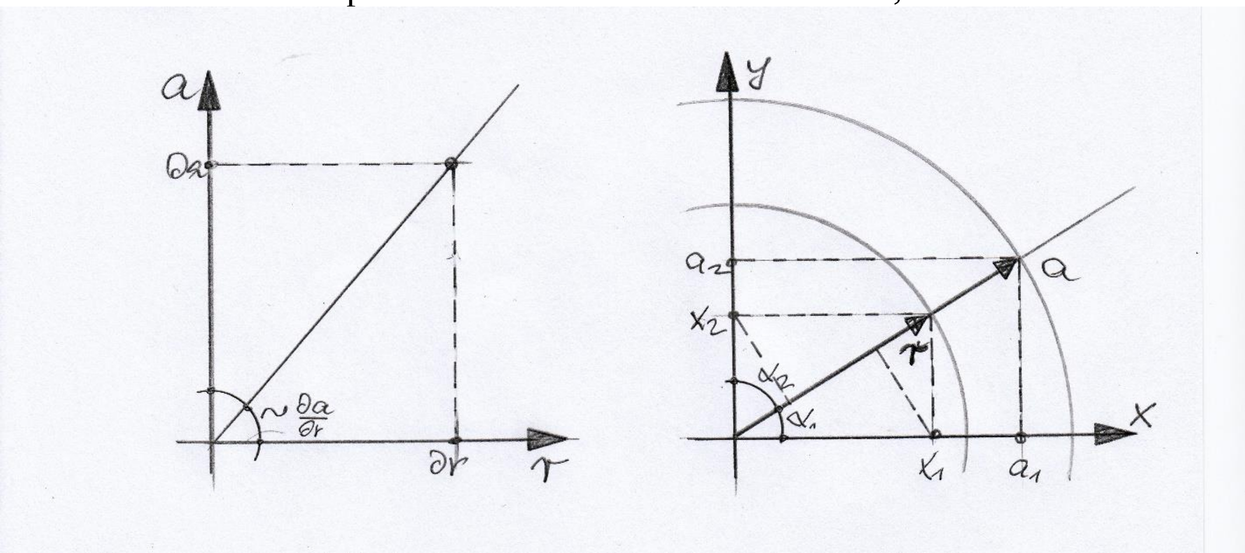
für einen Ort X $r = r(x_i)$
für einen Punkt P $a = a(r) = a(x_i)$

Wir fordern, dass die Abhängigkeiten von r und x_i linear sein sollen und können dann (mit c=const.) schreiben:

$$a = c\,r \rightarrow \quad \frac{\partial a}{\partial r} = c \quad \rightarrow \quad a = \frac{\partial a}{\partial r} r$$

$$a = c_i\,r \rightarrow \quad \frac{\partial a}{\partial x_i} = c_i \quad \rightarrow \quad a = \frac{\partial a}{\partial x^i} x_i = \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x^i} x_i = \frac{\partial a}{\partial r} \cos\alpha^i\, x_i = \frac{\partial a}{\partial r} r$$

Das Ergebnis $a = \frac{\partial a}{\partial r} r$ haben wir als „Linearform einer Vektorfunktion“ bezeichnet, weil hier Abstand und Richtung als skalare Werte zusammengeführt werden.
Die Ausdrücke $\frac{\partial a}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial a}{\partial r}$ bezeichnen die Divergenz des Vektors **a** in Abhängigkeit von x_i und von r. Sie sind die Teile eines partiellen Differentials, deshalb sollen Sie ihre partielle Schreibweise auch behalten, wenn sie alleinstehen.



Funktion **a**$_{(r)}$ Funktion **a**$_{(xi)}$

Wir sehen, dass beide Formen des Vektors ineinander überführt werden können.
Der hochgestellte Index bei cosα zeigt an, dass es sich um eine kontravariante Projektion der kartesischen Komponenten x_i auf die Vektorachse r handelt.
Wir haben damit eine lineare Funktion beschrieben, die in der analytischen Geometrie in der Form

$$y = f(x) = c\,x$$

dargestellt wird. Wir wollen nun eine entsprechende lineare Vektorfunktion zwischen den Vektoren **a** und **r** darstellen in der Form

$$\mathbf{a} = F(\mathbf{r}) = c\,\mathbf{x}$$

oder in indizierter Schreibweise

$$a_i\,\mathbf{g}_i = t_{mn}\,x_k\,\mathbf{g}_k$$

Der Ausdruck t_{mn} entspricht der Konstanten c, diese soll eine Verbindung zwischen den mit i und k indizierten Vektoren herstellen, sie ist deshalb zweifach indiziert und wir führen sie als Matrix eines zweistufigen Tensors ein.
Wir formen die Vektorgleichung auf den gemeinsamen Basisvektor um, lösen nach t_{mn} auf und gehen zu einer basisfreien Darstellung über:

$$a\frac{a_i}{a}\cos\alpha_i\,\bar{g}_r = t_{mn}r\frac{x_k}{r}\cos\alpha_k\,\bar{g}_r \qquad \text{mit } \frac{a}{r} = \frac{\partial a}{\partial r}$$

$$t_{mn} = \frac{\partial a}{\partial r}(\cos\alpha_i\cos\alpha_k)\left(\cos\alpha^i\cos\alpha^k\right)$$

Die Indizes $_{mn}$ finden ihre Entsprechung $_{ik}$ auf der rechten Seite der Gleichung, und wir können umindizieren

$$t_{mn} = t_{ik}$$

Die Ausdrücke in Klammern auf der rechten Seite erkennen wir als Kronecker-Delta:

$$(\cos\alpha_i\cos\alpha_k)(\cos\alpha^i\cos\alpha^k) = (\cos\alpha_i\cos\alpha^i)(\cos\alpha_k\cos\alpha^k)$$

$$\delta_{ik}\,\delta^{ik} = \delta_i^{\ i}\,\delta_k^{\ k}$$

daraus folgt: $$t_{ik} = \frac{\partial a}{\partial r}\delta_{ik}\delta^{ik} = \frac{\partial a}{\partial r}(1x1) \quad \text{und mit} \quad \delta_{ik} = \delta^{ik} = 1$$

$$t_{ik} = \frac{\partial a}{\partial r}(\delta_{ik})^2$$

Wir erhalten für den Vektor **a** unsere Ausgangsgleichung:

$$\mathbf{a} = a_i\,\mathbf{g}_i = \frac{\partial a}{\partial r}x_i\bar{g}_i = \frac{\partial a}{\partial r}\,\mathbf{r}$$

Wir identifizieren $(x_i\bar{g}_i)$ als den axial unverschieblichen Ortsvektor und mit $\frac{\partial a}{\partial r}$ den Anteil, der die Änderung des Betrages des Vektors beschreibt. Diesen Ausdruck erkennen wir als die Divergenz eines Vektors, wenn wir geringförmig umformen:

$$\text{div a} = \frac{\partial a}{\partial x_k}\mathbf{g}_k = \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_k}\mathbf{g}_k = \frac{\partial a}{\partial r}\mathbf{g}_r = \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_2} + \frac{\partial a}{\partial x_3}\right)\mathbf{g}_k$$

Die Divergenz wird standardmäßig als Skalar dargestellt. Wie aus der obigen Ableitung erkennbar, kann die Divergenz auch als symmetrischer Teilvektor eines zweistufigen Tensors mit der Richtung der Ableitung des zugehörigen Vektors aufgefasst werden.

31. Das Transformationsgesetz eines Vektors

Gehen wir zurück und stellen die Vektorfunktion zwischen zwei beliebigen Vektoren **a** und **b** dar, so ergibt sich

$$\mathbf{a} = F(\mathbf{b})$$
$$\mathbf{a} = (\delta_i^{\,k})^2\, \mathbf{b}$$

Die Beziehung beschreibt die Transformation des Vektors **a** in den Vektor **b**
Das Transformationsgesetz der Vektorrechnung beruht auf der Forderung, dass sich der „Wert" eines Vektors bei einer Drehung des Koordinatensystems nicht ändern darf. Unter dem „Wert" wollen wir die Eigenschaften „Betrag" und „Richtung" eines Vektors verstehen.
Wenn wir von der symbolischen Form zur Indexform übergehen und trennen die beiden Faktoren, so ergibt sich

$$\begin{aligned} a_i\, \mathbf{g}_i &= (\delta_i^{\,k}\, b_k)\, (\delta_i^{\,k}\, \mathbf{g}_k) = b_i\, \mathbf{g}_i \\ &= (\cos\alpha_i\, \cos\beta^k\, b_k)\, (\cos\alpha_i\, \cos\beta^k\, \mathbf{g}_k) \\ &= \cos\alpha_i\, b\, \cos\alpha_i\, \mathbf{g}_\mathbf{r} \\ a_i\, \mathbf{g}_i &= b_i\, \mathbf{g}_\mathbf{i} \\ \mathbf{a} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

Wir stellen fest,

dass die quadratische Form von δ_{ik} erforderlich ist, um sowohl den „Betrag" als auch die „Richtung" eines Vektors zu transformieren,
dass sich die Richtung des transformierten Vektors **b** gegenüber dem Ausgangsvektor **a** nicht ändert,
dass der Betrag der beiden Vektoren gleich sein muss.

Dieses Ergebnis entspricht dem Zusammenhang, den wir bei der Multiplikation von Vektoren bereits gefunden haben. Hier werden allerdings keine zwei Vektoren multipliziert, vielmehr handelt es sich um die Multiplikation zweier indizierter Größen, von denen nur eine ein Vektor ist.

Damit soll die Ausarbeitung vorläufig enden.
Nachfolgend einige Versuche bestimmte Zusammenhänge zu beschreiben, die über den bisherigen Rahmen hinausgehen.